S.A) Se $f \in L^1$ e $a > 0$, mostre que
$$E_a = \{x \in X ; |f(x)| \geq a\}$$
tem medida finita. Além disso, o conjunto
$$E = \{x \in X ; f(x) \neq 0\}$$
é σ-finito

RES)

Seja $a > 0$ e suponha que $\mu(E_a) = +\infty$
Note que $a\chi_{E_a} \leq |f|$, logo
$$\int a\chi_{E_a} \leq \int |f| < +\infty$$
Mas $\int a\chi_{E_a} = a\mu(E_a) = +\infty$, absurdo.
Logo, $\mu(E_a) < +\infty$
Agora seja
$$E_n = \{x \in X ; |f(x)| \geq 1/n\}$$
Então $\mu(E_n) < +\infty$, $\forall n$ e
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$
Logo E é σ-finito.

S.B) Seja f mensurável. Se $f(x) = 0$ q.t.p. em X, então $f \in L^1$ e
$$\int f = 0$$

RES)

De fato, temos $f(x)=0$ q.t.p. $\Rightarrow |f(x)|=0$ q.t.p.

$$\Rightarrow \int |f| \leq \int 0 = 0$$

$$\Rightarrow \int |f| = 0 < +\infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$$

Além disso,

$$|\int f| \leq \int |f| = 0 \Rightarrow \int f = 0 \quad \square$$

S.C) Se $f \in \mathcal{L}^1$ e g é mensurável tal que $f(x)=g(x)$ q.t.p., então $g \in \mathcal{L}^1$ e

$$\int f = \int g$$

RES) De fato, note que $h(x) = f(x)-g(x) = 0$ q.t.p., logo, pelo S.B

$$\int h(x) = 0$$

Mas

$$\int h(x) = \int f(x)-g(x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\int g(x) = \underbrace{\int f(x)-g(x)}_{=0} - \underbrace{\int f(x)}_{<+\infty}$$

$$\Downarrow$$

$$\int g(x) < +\infty$$

Logo $\int g(x) = \int f(x) < \infty$.

5.D Se $f \in L^1(X)$ e $\varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi$ função simples mensurável tal que
$$\int |f - \varphi| < \varepsilon$$

Escreva $f = f^+ - f^-$, onde f^+ e f^- são as partes negativa e positiva de f.
Então, pela def. de integral, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \varphi^+, \varphi^-$ funções simples tais que $\varphi^+ \leq f^+$, $\varphi^- \leq f^-$ e
$$0 < \underbrace{\int f^+ - \int \varphi^+}_{= \int f^+ - \varphi^+} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < \underbrace{\int f^- - \int \varphi^-}_{= \int f^- - \varphi^-} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daí, pondo $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, temos φ função simples e
$$\begin{aligned}\int |f - \varphi| &= \int |f^+ - f^- - \varphi^+ + \varphi^-| \\ &\leq \int |f^+ - \varphi^+| + |\varphi^- - f^-| \\ &= \int f^+ - \varphi^+ + \int f^- - \varphi^- \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square\end{aligned}$$

S. I Seja $f : X \to \mathbb{C}$. Mostre que f é integrável se e só se $|f|$ é integrável, e

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

RESP)

De fato, suponha f real. Então

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|$$

Se f é complexa, suponha $\int f \neq 0$.
Então $\int f = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.
Assim $\int e^{-i\theta} f = e^{-i\theta} \int f = r = \left| \int f \right|$, logo

$$\left| \int f \right| = e^{-i\theta} \int f = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \int f \right) = \mathrm{Re}\left(\int e^{-i\theta} f \right)$$

$$= \int \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f \right) \leq \int \left| \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f \right) \right|$$

$$\leq \int \left| e^{-i\theta} f \right| = \int |f|$$

5.5 Seja $f_n : X \to \mathbb{C}$, $\forall n$, $f_n \to f$ q.t.p. Se $\exists g \in L^1(X)$ tal que $|f_n| \leq g$, q.t.p. então

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

RESP:

De fato, $|f_n| \leq g$ q.t.p. $\Rightarrow |Re(f_n)| \leq g$ q.t.p

$|Im(f_n)| \leq g$ q.t.p.

Além disso $|Re(f_n)| \to |Re(f)| \leq g$

$|Im(f_n)| \to |Im(f)| \leq g$ q.t.p.

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int Re(f_n) = \int Re(f)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int Im(f_n) = \int Im(f)$$

Donde

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim_{n\to\infty} \left[\int Re(f_n) + i \int Im(f_n) \right]$$

$$= \int Re(f) + i \int Im(f)$$

$$= \int f \, \square$$

S.L. Seja $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^1(X)$ talque $f_n \to f$ uniformemente e $\mu(X) < \infty$, então

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

R: De fato, dado $\varepsilon = 1$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $|f_n(x) - f(x)| < 1$ $\forall x \in X$. Assim

$\forall n \geq N$

$$|f(x)| < 1 + |f_N(x)| \, , \forall x \in X$$

$$\Rightarrow \int |f(x)| < \mu(X) + \int |f_N(x)| < +\infty$$

Logo, $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Além disso,

$$|f_n(x)| \leq 1 + |f(x)| \quad , \forall n \geq N$$

e $1 + |f(x)| \in \mathcal{L}^1(X)$, logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue:

$$\lim \int f_n = \int \lim f_n = \int f$$

5.0. Se $f_n \in \mathcal{L}^1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| \, d\mu < +\infty$$

Então a série $\sum f_n(x)$ converge q.t.p. a uma função f em $\mathcal{L}^1$. Além disso

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu$$

Dem:)

Note que $\sum_{n=1}^{N} |f_n| \leq \sum_{n=1}^{N+1} |f_n|$, logo, pelo T.C.D.

$$\int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f_n| = \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} |f_n|$$

$$\underset{\displaystyle \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|}{\parallel} \qquad \qquad \overset{\parallel}{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int |f_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$$

soma finita

Isto é, $\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n|$

Logo, a função $g = \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|$ está em $\mathcal{L}^1$.

Em particular,

$$\sum |f_j(x)| < +\infty \quad \text{q.t.p.}$$

$$\Rightarrow \sum f_j(x) < +\infty \quad q.t.p.$$

Além disso,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\right| \leq g \quad , \forall n$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) \quad q.t.p.$$

Logo, pelo T.C.D.L. temos

$$\lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} f_j(x) = \int \lim \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

$\shortparallel$ soma finita $\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int f_j(x) \qquad\qquad \int \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$$

$\shortparallel$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int f_j(x)$$

$\square$

5.P Seja $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^1$, $f_n \to f$ q.t.p.
Se

$$\lim \int |f_n - f| = 0 \text{ então } \int |f| = \lim \int |f_n|$$

$\boxed{\text{RESP}}$

De fato,

temos que

$$\limsup \int |f_n| \leq \limsup \left[\int |f_n - f| + \int |f| \right]$$

$$= \lim \int |f_n - f| + \int |f| = \int |f|$$

e $\int |f| \leq \int |f - f_n| + \int |f_n|$

$\Rightarrow \int |f| \leq \liminf \int |f_n|$

$\boxtimes$

5Q Se $t > 0$, então

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}$$

Além disso, se $t \geq a > 0$, então $e^{-tx} \leq e^{-ax}$.
Use isso p/ provar que

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

RESP

Queremos diferenciar $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ em t sob sinal de integração. Daí

$$\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{t^n}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx\right|_{t=1} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Mas se pudermos comutar temos

$$\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}\int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}} e^{-tx}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty}(-1)^{(n-1)} x^{(n-1)} e^{-tx}\,dx$$

Logo $\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} = (n-1)!$

De fato, note que, pondo $F(x,t) = e^{-tx}$, temos $F(x,t) = |e^{-tx}| \leq e^{-\frac{1}{2}x}$, $\forall t \geq 1/2$

Além disso,
$$\int_0^{+\infty} e^{-1/2 x} dx = 2 < +\infty$$

De fato, note que $1/2$ poderia ser substituído p/ qualquer $a>0$ e logo mostrando em $t \in (0, +\infty)$.

Além disso note que
$$\frac{d}{dt} F(x,t) = -x e^{-tx}$$

Novamente,
$$|-xe^{-tx}| \leq x e^{-1/2 x}, \quad \forall t \geq 1/2, \forall x \in (0,\infty)$$
e
$$\int_0^{+\infty} x e^{-1/2 x} < +\infty$$

Logo podemos derivar sob sinal de integração novamente. Em geral, temos
$$\frac{d^{(n)}}{dt^n} F(x,t) = (-1)^n x^n e^{-tx}$$

Dessa forma que

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial t^n} F(x,t)\right| \leq x^n e^{-1/2\, x}, \quad \forall x \in (0,\infty), \ \forall t \geq 1/2$$

e $\int_0^{+\infty} x^n e^{-1/2 x}\, dx < +\infty$, logo podemos diferenciar sob sinal de integral e obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} F(x,t)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} F(x,t)\, dx$$

Δ

S.R Suponha $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ e que $f(x,t)$ é mensurável p/ cada $t \in [a,b]$.
Suponha que p/ $t_0, t_1 \in [a,b]$, $x \mapsto f(x,t_0)$ é integrável em X, que $\frac{\partial f}{\partial t_1}(x,t_1)$ existe e $\exists\, g \in L^1$ t.q.

$$\left|\frac{f(x,t) - f(x,t_1)}{t - t_1}\right| \leq g(x)$$

p/ $x \in X$, $t \in [a,b]$, $t \neq t_1$. Então

$$\left.\frac{d}{dt}\int f(x,t)\, d\mu(x)\right|_{t=t_1} = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_1)\, d\mu(x)$$

Dem5) seja $t_n \subset [a,b]$, $t_n \to t_1$.

Ponha

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_1)}{t_n - t_1}$$

Então

$$|h_n(x)| \leq g(x) \in \mathcal{L}^1$$

$$h_n(x) \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_1)$$

De modo que pelo T. C. D. L. temos que $\int h_n(x) \longrightarrow \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_1)$

Mas

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n(x)\,dx = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_1} \int f(x,t_1)\,dx$$, logo segue A

$$\|$$

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x,t_n) - f(x,t_1)}{t_n - t_1}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\int f(x,t_n)\,dx - \int f(x,t_1)\,dx}{t_n - t_1}$$

5.1 Seja $f: X \to \mathbb{R}$ mensurável. P/ cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq n \\ \text{sign}(f(x))\, n, & \text{se } |f(x)| > n \end{cases}$$

Então, se $\sup \int |f_n| < \infty$
Então f é integrável.

Resp:
De fato, temos que $f(x) = \lim f_n(x)$, $\forall x$ e
logo

$$\int |f| = \int |\lim f_n| \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf \int |f_n|$$

$$\leq \sup \int |f_n| < +\infty$$