Ex 4.2) Seja $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Prove que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.
Mais precisamente,

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{1/p - 1/q} \|f\|_q \quad , \forall f \in L^q(\Omega)$$

RES) Temos que $|f(x)|^p \leq 1 + |f(x)|^q$, $\forall x$

De fato, se $|f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x)|^p < 1 \leq 1 + |f(x)|^q$

se $|f(x)| \geq 1 \Rightarrow |f(x)|^p \leq |f(x)|^q \leq 1 + |f(x)|^q$

Logo

$$\int |f(x)|^p \leq |\Omega| + \int |f(x)|^q < \infty$$

Logo $f \in L^p(\Omega)$. Além disso, note que $|f|^p \in L^{q/p}(\Omega)$, logo

$$\|f\|_p^p = \int |f(x)|^p = \int |f(x)|^p \cdot 1 \leq \| |f|^p \|_{q/p} \|1\|_{\frac{q}{q-p}}$$

$$\frac{1}{q/p} + \frac{1}{p'} = 1 \Rightarrow \frac{1}{p'} = 1 - \frac{p}{q} = \frac{q-p}{q} \Rightarrow p' = \frac{q}{q-p}$$

$$= \left(\int |f|^q\right)^{p/q} |\Omega|^{\frac{q-p}{q}}$$

$$= \|f\|_q^p |\Omega|^{\frac{q-p}{q}}$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_q |\Omega|^{\frac{q-p}{qp}} = \|f\|_q |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

$\square$

Ex 4.61

2. Suponha $|\Omega| < \infty$, seja $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ e que $\exists C > 0$ tal que

$$\|f\|_p \leq C, \quad \forall\, 1 \leq p < \infty$$

Prove que $f \in L^\infty(\Omega)$

RESP)

Suponha que não. Então $|A_n| > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ onde

$$A_n = \{x \mid |f(x)| > n\}$$

(Do contrário, teríamos $\|f\|_\infty < n$, p/ algum n)

Mas considere $g = n\chi_{A_n}$.

Então $0 \leq g < f$, logo

$$n|A_n|^{1/p} = \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \|f\|_p \leq C, \quad \forall p \geq 1$$

$$\Rightarrow |A_n| \leq \left(\frac{C}{n}\right)^p, \quad \forall p \geq 1$$

Tome n suf. grande, $n > C$. Então $\frac{C}{n} < 1$.

Assim

$$|A_n| = \lim_{p \to \infty} |A_n| \leq \lim_{p \to \infty} \left(\frac{C}{n}\right)^p = 0 \quad \rightarrow\leftarrow$$

Logo $f \in L^\infty$

Ou ainda,

Considere $E_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leq n\}$

Então pondo

$$f_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

então

$$\|f_n\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \leq C$$

e $f_n \in L^\infty$, $\forall n$. Logo, como $\lim_{p\to\infty} \|f_n\|_p = \|f_n\|_\infty$

(aqui usamos que $f_n \in L^\infty$) então $\|f_n\|_\infty \leq C$, $\forall n = 1, 2, \ldots$

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists N_n$, $|N_n| = 0$ e $|f_n(x)| \leq C$, $\forall x \in N_n^c$. Ponha $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$. Então $|N| = 0$ e $x \in N^c \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} N_n^c \Rightarrow |f_n(x)| \leq C$, $\forall n$.

Logo,

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq C, \ \forall x \in N^c$$

e $|N| = 0 \Rightarrow f \in L^\infty$ e $\|f\|_\infty \leq C$ $\square$

$\boxed{\text{Ex 4.6}}$

3. Construa $f \in \bigcap_{1\leq p<\infty} L^p(\Omega)$ t.q. $f \notin L^\infty(\Omega)$, $\Omega = (0,1)$

RESP

Tome $f(x) = \log(x)$

Real(?)do, como

$$\lim_{t\to 0^+} \log(t)\cdot t^{1/2p} = 0$$

temos que $|\log(t)|^p < t^{-1/2}$, $\forall t$ suf. pequeno,
de modo que

$$\int_0^1 |\log(t)|^p dt = \int_0^\varepsilon |\log(t)|^p dt + \int_\varepsilon^1 |\log(t)|^p dt$$

$$\leq \int_0^\varepsilon t^{-1/2} dt + \int_\varepsilon^1 |\log(t)|^p dt < +\infty$$

4.3

3. Seja $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ e $(g_n)_n \subset L^\infty(\Omega)$ limitada. Suponha que $f_n \to f$ em L^p e $g_n \to g$ q.t.p. Prove que $f_n g_n \to fg \in L^p(\Omega)$.

R)

Primeiro, note que $\|g_n\|_\infty \leq M$, $\forall n \Rightarrow |g_n(x)| \leq M$, $\forall n$, q.t.p., logo

$$|g(x)| = \lim_{n\to\infty} |g_n(x)| \leq M, \text{ q.t.p.}$$

Logo $g \in L^\infty$.

De fato, p/ cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists N_n \subset \Omega$, $|N_n| = 0$ e $|g_n(x)| \leq M$, $\forall x \in N_n^c$.

Pondo $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$, temos $|N| = 0$, e $|g_n(x)| \leq M$, $\forall n \in N^c$.

Logo $g \in L^\infty$, $fg \in L^p$.

Assim

$$\|f_n g_n - fg\|_p^p = \int |f_n g_n - fg|^p \leq \int 2^p (|f_n g_n - f g_n|^p + |f g_n - fg|^p)$$

$$= 2^p \int |f_n - f|^p |g_n|^p + 2^p \int |g_n - g|^p |f|^p$$

$$\leq 2^p M^p \|f_n - f\|_p^p + 2^p \int |g_n - g|^p |f|^p$$

AF: $\int |g_n - g|^p |f|^p \to 0$ p/ $n \to +\infty$

De fato, $|g_n - g|^p |f|^p \to 0$ q.t.p. pois $g_n \to g$ q.t.p.

Além disso, $|g_n - g|^p |f|^p \leq 2^p(|g_n|^p + |g|^p)|f|^p$

$$\leq 2^p(M^p + M^p)|f|^p$$

$$= 2^{p+1} M^p |f|^p \in L^1(\Omega)$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, a afirmação segue.

Como $\|f_n - f\|_p^p \to 0$, segue que $\|f_n g_n - fg\|_p^p \to 0$, ou seja, $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$. $\square$

Ex 4.4

1. Sejam $f_1, \ldots, f_k$ tq $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\forall i$ e $1 \leq p_i \leq \infty$ e $\sum_{i=1}^{k} 1/p_i \leq 1$

Ponha

$$f(x) = \prod_{i=1}^{k} f_i(x)$$

Prove que $f \in L^p$, com $\frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$ e que

$$\|f\|_p \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}$$

Dem)

Provemos por indução em k. Vejamos que vale p/ $k=2$.

De fato, temos $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \Rightarrow 1 = \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p_2}$. Logo, por Hölder

Como $|f_1|^p \in L^{p_1/p}$, $|f_2|^p \in L^{p_2/p}$

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \int |f_1|^p |f_2|^p$$

$$\leq \| |f_1|^p \|_{p_1/p} \| |f_2|^p \|_{p_2/p}$$

$$= \left(\int |f_1|^{p_1}\right)^{p/p_1} \left(\int |f_2|^{p_2}\right)^{p/p_2}$$

$$= \|f_1\|_{p_1}^p \|f_2\|_{p_2}^p$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$

Como queríamos.

Agora seja $f_1, \dots, f_k$, $f_i \in L^{p_i}$.

Então pondo $g = f_2 \cdot f_3 \cdots f_k$ temos, como $\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{p_i} \leq 1$, que $g \in L^{p'}$ e

$$\|g\|_{p'} \leq \prod_{i=2}^{k} \|f_i\|_{p_i}, \text{ onde } \frac{1}{p'} = \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{p_i}$$

Daí $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'} \Rightarrow 1 = \frac{p}{p_1} + \frac{p}{p'}$

Portanto

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \int |f_1|^p |g|^p$$

$$\leq \| |f_1|^p \|_{p_1/p} \; \| \, |g|^p \|_{p'/p}$$

$$= \|f\|_{p_1}^p \, \|g\|_{p'}^p$$

$$\leq \|f_1\|_{p_1}^p \, \|f_2\|_{p_2}^p \cdots \|f_k\|_{p_k}^p$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k} \quad \Omega$$

Ex 4.4

2- Deduza que se $f \in L^p \cap L^q$, $1 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r$, $\forall\, r$ entre p e q. Ainda se

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \quad \alpha \in [0,1]$$

então

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \, \|f\|_q^{1-\alpha}$$

RESP) Temos $1 = \dfrac{\alpha r}{p} + \dfrac{(1-\alpha) r}{q}$

Além disso, $|f|^{\alpha r} \in L^{p/\alpha r}$, $|f|^{(1-\alpha) r} \in L^{q/(1-\alpha) r}$, logo pelo Hölder

$$\|f\|_r^r = \int |f|^r = \int |f|^{\alpha r} |f|^{(1-\alpha) r}$$

$$\leq \| |f|^{\alpha r} \|_{\frac{p}{\alpha r}} \, \| |f|^{(1-\alpha) r} \|_{\frac{q}{(1-\alpha) r}}$$

$$= \|f\|_p^{\alpha r} \, \|f\|_q^{(1-\alpha) r}$$

$\Rightarrow \|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{(1-\alpha)}$, $\square$

Ex 4.5

1. Prove que $L^1 \cap L^\infty$ é denso em L^p, $1 \leq p < \infty$.

$\rightarrow$ Note que $\int |f(x)|^p = \int |f(x)|^{p-1}|f(x)| \leq \|f\|_\infty^{p-1} \int |f(x)| = \|f\|_\infty^{p-1}\|f\|_1 < \infty$

Logo $L^1 \cap L^\infty \subset L^p$

RESP) Seja $f \in L^p(\Omega)$.

Considere $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = T_n \circ f(x) \cdot \chi_{\Omega_n}$$

onde $|\Omega_n| < \infty$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$

e

$$T_n \circ f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } |f(x)| \leq n \\ 0, & \text{se } |f(x)| > n \end{cases}$$

Então é claro que $f_n \in L^\infty$, $\forall n$ e ainda

$$\int |f_n(x)|\,dx = \int_{\Omega_n} |T_n \circ f(x)| \leq n\,|\Omega_n| < +\infty$$

Logo $f_n \in L^1(\Omega)$, $\forall n$. Além disso, $|f_n - f|^p \to 0$

claramente e, $|f_n| \leq |f|$, $\forall n$

Logo $|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \leq 2^{p+1}|f|^p \in L^1$

Logo, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, $\int |f_n - f|^p \to \int 0 = 0$, isto é, $\|f_n - f\|_p^p \to 0$
$\Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$ isto é, $f_n \to f$ em L^p.
Logo, $\overline{L^1 \cap L^\infty} = L^p$

Ex 4.5

2. Prove que o conjunto
$B = \{f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega) \,;\, \|f\|_q \leq 1\}$
é fechado em $L^p(\Omega)$

RESP) Seja $(f_n)_n \subset B$, $f_n \to f$ em L^p.
Então existe subsequência $(f_{n_k})_k$ tal que $f_{n_k} \to f$ q.t.p.
Como $f_n \in B$, $\|f_n\|_q \leq 1$, $\forall n$.
Daí

$$\int_\Omega |f|^q \, d\mu = \int_\Omega \lim |f_n|^q = \int_\Omega \liminf |f_n|^q$$

$$\leq \liminf \int_\Omega |f_n|^q \leq 1$$

Lema de Fatou

Daí $f \in L^p \cap L^q$ e $\|f\|_q \leq 1 \Rightarrow f \in B$, donde segue que B é fechado ◻

(3) Seja $(f_n)_n$ sequência em $L^p \cap L^q$ e $f \in L^p$. Suponha que

$$f_n \to f \text{ em } L^p \text{ e } \|f_n\|_q \leq C$$

Prove que $f \in L^r$ e $f_n \to f$ em L^r, $\forall r$ entre p e q, $r \neq q$.

RESP)

De fato, do item 2. temos que $A := \{f \in L^p \cap L^q \mid \|f\|_q \leq C\}$ é fechado em L^p, logo, $f \in A \Rightarrow \|f\|_q \leq C \Rightarrow f \in L^q$

Daí, do exc 4.4.2.

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha} \|f\|_q^{1-\alpha} < \infty$$

$\Rightarrow f \in L^r$.

Finalmente,

$$\|f_n - f\|_r \leq \|f_n - f\|_p^{\alpha} \|f_n - f\|_q^{1-\alpha}$$

$$\leq \|f_n - f\|_p^{\alpha} \left(\|f_n\|_q^{1-\alpha} + \|f\|_q^{1-\alpha}\right)$$

$$\leq 2C^{1-\alpha} \|f_n - f\|_p^{\alpha} \to 0$$ Logo $f_n \to f$ em L^r

Ex 4.7: Seja $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Seja $a(x)$ função mensurável em Ω. Suponha que $au \in L^q(\Omega)$, $\forall u \in L^p(\Omega)$. Prove que $a \in L^r(\Omega)$ com

$$r = \begin{cases} \frac{pq}{p-q}, & \text{se } p < \infty \\ q, & \text{se } p = \infty \end{cases}$$

RESP)

Considere o operador $T : L^p \to L^q$

$$u \mapsto au$$

Afirmo que o gráfico de T é fechado. De fato, seja $(u_n)_n \subset L^p$ tal que $u_n \to u$ em L^p e $au_n \to f$ em L^q. Temos que existe subsequência tq $u_{n_k} \to u$ q.t.p. e $au_{n_k} \to f$ q.t.p.. Logo, $f = au$ q.t.p. e logo $f = Tu$. Segue do teorema do gráfico fechado que T é limitada, logo, $\exists C > 0$ tal que

$$\|au\|_q = \|Tu\| \leq C\|u\|_p \quad , \forall u \in L^p$$

$$\Rightarrow \int |a|^q |u|^q \leq C^q \|u\|_p^q \quad (*)$$

Caso 1: $p < \infty$

Segue que, se $v \in L^{p/q} \Leftrightarrow v^{1/q} \in L^p$, logo, substituindo $v^{1/q}$ em $*$ obtemos

$$\int |a|^q |v| \leq C^q \| v^{1/q} \|_p^q =$$

Mas $\| v^{1/q} \|_p^q = \left(\int |v|^{p/q} \right)^{q/p} = \|v\|_{p/q}$, logo

$$\int |a|^q |v| \leq C^q \|v\|_{p/q}$$

Logo, o mapa $v \longmapsto \int |a|^q v$ é funcional linear contínuo em $L^{p/q}(\Omega)$

$\left(\text{pois } \left|\int |a|^q v\right| \leq \int |a|^q |v| \leq C^q \|v\|_{p/q} \right)$

e logo $|a|^q \in L^{(p/q)'}(\Omega)$

Mas $\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)'} + \frac{1}{\frac{p}{q}} = 1 \iff \frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)'} = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p} \iff \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p}{p-q}$

$\Rightarrow |a|^q \in L^{\frac{p}{p-q}}$ isto é, $\int ||a|^q|^{\frac{p}{p-q}} < +\infty \iff \int |a|^{\frac{pq}{p-q}} < \infty$

$\iff a \in L^{\frac{pq}{p-q}}(\Omega)$ $\blacksquare$

Caso $p = \infty$, tome $u \equiv 1$, assim

$$\int |a|^q \leq C^q \Rightarrow a \in L^q(\Omega). \square$$

(4.8) Seja $X \subset L^1(\Omega)$ espaço vetorial fechado. Suponha que

$$X \subset \bigcup_{1<q\leq\infty} L^q(\Omega)$$

1. Prove que $\exists\, p>1$ tal que $X \subset L^p(\Omega)$

<u>Dica:</u> P/ cada $n\in\mathbb{N}$, considere

$$X_n = \{ f \in X \cap L^{1+1/n} ; \|f\|_{1+1/n} \leq n \}$$

2. Prove que existe $C>0$ tal que

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_1 \quad , \forall f \in X.$$

RESP:

1. Note que X com a norma $\|\cdot\|_1$ é espaço de Banach (pois é subespaço fechado.) Para cada $n\in\mathbb{N}$, X_n é fechado em X (pelo ex. 4.5). Por outro lado, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.
De fato, p/ cada $f\in X$, $\exists\, q>1, f\in L^q$.
Logo, $f\in L^{1+1/n}(\Omega)$ desde que $1<1+1/n\leq q$ e, mais ainda:

$$\|f\|_{1+1/n} \leq \|f\|_1^{\alpha_n}\|f\|_q^{1-\alpha_n}, \text{ onde } \frac{1}{1+1/n} = \frac{\alpha_n}{1}+\frac{1-\alpha_n}{q}$$

$\leq n$

p/ n suf. grande.

Segue do teorema de categoria de Baire que $\exists n_0 \in \mathbb{Z}$, tal que $\operatorname{int} X_{n_0} \neq \emptyset$.

Logo $X \subset L^{1+1/n_0}(\Omega)$, pois $L^{1+1/n_0} \cap X$ é subespaço de X com interior não vazio $\Rightarrow L^{1+1/n_0} \cap X = X$.

PAG 121