Ex 33 Se $f_n \geq 0$ e $f_n \to f$ em medida, então
$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

RESP:

Pela definição de lim inf, $\exists$ subsequência (f_{n_k}) tal que
$$\lim_{k\to\infty} \int f_{n_k} = \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Mais ainda, $(f_{n_k})_k$ converge em medida, pois dado $\varepsilon > 0$
$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X \mid f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Em particular, $(f_{n_k})_k$ é de Cauchy em medida, logo tem subsequência $(f_{n_{k_i}})_i$ que converge q.t.p. e em medida para g. Note que $(f_{n_{k_i}})_i$ subseq. de $f_{n_k} \Rightarrow f_{n_{k_i}} \to f$ em medida também. Logo $f = g$ q.t.p. pois dado $\varepsilon > 0$, sejam i_0 tal que
$$\mu\{x \in X ; |f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} < \delta/2$$
$$\mu\{x \in X ; |g(x) - f_{n_{k_i}}(x)| \geq \varepsilon/2\} < \delta/2$$

Daí, como
$$\underset{(A)}{\{x \in X ; |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}} \overset{*}{\subset} \underset{(B)}{\{x \in X ; |f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| \geq \varepsilon_2\}} \cup$$
$$\cup \underset{(C)}{\{x \in X ; |g(x) - f_{n_{k_i}}(x)| \geq \varepsilon/2\}}$$

segue que

$$\mu(\{x \in X ; |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} < \delta$$

* De fato, seja $x \in A$. Então $|f(x)-g(x)| \geq \varepsilon$
Suponha que $x \notin B$ e $x \notin C$. Então $|f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| < \varepsilon/2$, $|g(x) - f_{n_{k_i}}(x)| < \varepsilon/2$
logo $|f(x)-g(x)| \leq |f(x) - f_{n_{k_i}}(x)| + |f_{n_{k_i}}(x) - g(x)| < \varepsilon \Rightarrow x \notin A$ →←
Logo $x \in A \cup B$.

Logo, segue do lema de Fatou que

$$\int f = \int g \leq \liminf_{i \to \infty} \int f_{n_{k_i}} = \liminf_{k \to \infty} \int f_{n_k}$$

$$= \liminf_{n \to \infty} \int f_n$$

Ex 34 Suponha $|f_n| \leq g \in L^1$ e $f_n \to f$ em medida.
a) $\int f = \lim \int f_n$
b) $f_n \to f$ em L^1

RESP)
Note que f_n é de Cauchy em medida, logo tem subseq que converge q.t.p. e em medida para uma função h mensurável, de modo que $f = h$ q.t.p. Logo $|h| \leq g \Rightarrow |f| \leq g \Rightarrow f \in L^1$.

Como $(g+f_n)_n$ e $(g-f_n)_n$ são sequências em L^+ que convergem em medida para $g+f$ e $g-f$, respectivamente, o exercício 33 implica que

$$\int g + \int f = \int g+f \leq \liminf \int g+f_n = \int g + \liminf \int f_n$$

$$\int g - \int f = \int g-f \leq \liminf \int g-f_n = \int g - \limsup \int f_n$$

Como $\int g < \infty$, segue que

$$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n \Rightarrow \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

b) Note que $(|f_n - f|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0 em medida, pois

$$\{x\in X : ||f_n(x) - f(x)| - 0| \geq \varepsilon\} = \{x\in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

e $f_n \to f$ em medida.

Além disso, $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g \in L^1$, $\forall n$. Logo, pela parte (a), temos

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = \int 0 = 0$$

Logo $f_n \to f$ em L^1. $\square$

$\boxed{\text{Ex 35}}$ $f_n \to f$ em medida se e somente se $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon, \forall n \geq N$

RESP)

Suponha que $f_n \to f$ em medida. Então, pela def. dado $\varepsilon > 0, \exists N$ $\forall n \geq N$ $\mu(\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$

Reciprocamente, se vale essa condição, suponha que $f_n \not\to f$ em medida. Então $\exists \varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que, $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N$ tal que

$$\mu(\{x \in X | f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) > \delta$$

Mas,

$$\mu(\{x \in X | f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon, \ \forall n \text{ suf. grande}$$

logo $\delta < \varepsilon$.

Mas, daí note que $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geq \delta$, logo

$$\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} \supset \{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \mu(\underbrace{\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}}_{A}) \geq \mu(\underbrace{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}}_{B}$$

Mas

Note que pela hipótese, $\exists N, \forall n \geq N$, $A < \delta < \varepsilon$

$$\Rightarrow \exists N, \forall n \geq N, \ B < \varepsilon$$

Uma contradição. Logo, $f_n \to f$ em medida $\square$

Exercício 39

Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ q.t.p. e em medida.

($\hookrightarrow$ i.e: $\forall \varepsilon>0, \exists E \subset X, \mu(E)<\varepsilon$ e $f_n \to f$ unif. em E^c.)

Resp)

De fato, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists E_n \subset X$ tal que $\mu(E_n) < 2^{-n}$ e $f_k \to f$ unif. em E_n^c.

Seja $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Então

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0$$

$$E^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k^c$$

Já que $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq 2^{1-n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mais ainda, se $x \in E^c$, então $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_n^c$ e logo $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$. Logo, $(f_n)_n$ converge q.t.p. p/ f.

Seja agora $\varepsilon>0$ e $E \subset X$ tal que $\mu(E)<\varepsilon$ e $f_n \to f$ unif. em E^c. Então $\exists N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n \geq N$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E^c$.

Segue que

$$\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq E$$

logo, $\mu(\{x \in X ; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(E) < \varepsilon$.

Assim, segue do exercício 35 que f_n converge a f em medida.

16) Se $f \in L^+$ e $\int f < \infty$, então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) < \infty$ e $\int_E f > (\int f) - \varepsilon$

R:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$E_n \doteq \{x \in X \mid f(x) > \tfrac{1}{n}\}$$

Note que $E_n \subset E_{n+1} \Rightarrow \chi_{E_n} \leq \chi_{E_{n+1}}$

Logo, pondo

$$f_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x)$$

temos $f_n \nearrow f$, logo, pelo teorema da convergência monótona

$$\lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f = \int f$$

Mas daí, note que $\exists n$, $\int f - \varepsilon < \int_{E_n} f$

Além disso, note que

$$\frac{1}{n}\chi_{E_n} < f$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) < \int f < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\mu(E_n) < n\int f < \infty$$

Logo segue $\square$

15) Se $(f_n)_n \subset L^+$, $f_n \longrightarrow f$, $f_n \geq f_{n+1}$ e $\int f_1 < \infty$

então

$$\int f = \lim \int f_n$$

Res:

Ponha $\quad g_n = f_1 - f_n$

Então $\quad g_n \leq g_{n+1}^{*}$ e $g_n \longrightarrow f_1 - f$

Além disso, $f_n \leq f_1, \forall n \Rightarrow \int f_n < \infty \Rightarrow f_n \in L^1, \forall n.$

* pois $\quad f_{n+1} \leq f_n \Rightarrow -f_{n+1} \geq -f_n \Rightarrow \underbrace{f_1 - f_{n+1}}_{g_{n+1}} \geq \underbrace{f_1 - f_n}_{g_n}$

Logo, pelo teorema da convergência monótona

$$\int f_1 - f = \lim_{n \to \infty} \int g_n = \lim_{n \to \infty} \int f_1 - f_n$$

$$\Leftrightarrow \int f_1 - \int f = \int f_1 - \lim_{n \to \infty} \int f_n$$

Como $\int f_1 < \infty$, isso implica

$$-\int f = -\lim \int f_n \Leftrightarrow \int f = \lim \int f_n \quad \square$$

17 Assuma o lema de Fatou e prove o teorema da convergência monótona

Dem.) Seja $(f_n)_n \subset L^+$, $f_n \to f$, $\overset{q.t.p.}{f_n \leq f_{n+1}}$.
Então, temos que
$$\int f = \int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

Mas, $f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow f_n \leq f$, logo

$$\underset{\forall n}{\int f_n \leq \int f} \Rightarrow \limsup \int f_n \leq \int f$$

$\therefore \lim \int f_n = \int f$ $\square$

13 Suponha $(f_n)_n \subset L^+$, $f_n \to f$ q.t.p. e $\int f = \lim \int f_n < \infty$. Então $\int_E f = \lim \int_E f_n$, $\forall E \in \mathcal{M}$, porém isso pode não valer se $\lim \int f_n = \infty$

Resp.)
Para o contraexemplo no caso $\lim \int f_n = \infty$, ponha

$F \doteq (-\infty, 0)$ e, p/ cada $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = F \cup [n, n+1)$$

Então χ_F e $\chi_{F_n} \in L^+$ e $\chi_{F_n} \to \chi_F$ q.t.p.
e $\int \chi_F = \infty = \lim \int \chi_{F_n}$. Porém

$$\int_{[0,\infty)} \chi_F = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \chi_{F_n}$$

Provemos agora a afirmação.
Temos

$$\int_E f = \int \liminf_{n\to\infty} (f_n)\, \chi_E \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \int f_n \chi_E$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

Análogamente, temos

$$\int_{E^c} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

Mas $f\chi_E + f\chi_{E^c} = f$ e $f_n\chi_E + f_n\chi_{E^c} = f_n, \forall n$.
Logo

$$\int_{E^c} f = \int f - \int_E f$$

e

$$\int_{E^c} f_n = \int f_n - \int_E f_n$$

Logo

$$\int f - \int_E f = \int_{E^c} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n = \liminf \left(\int f_n - \int_E f_n \right)$$

$$= \int f - \limsup \int_E f_n$$

Como $\int f < \infty$, então

$$- \int_E f \leq - \limsup \int_E f_n$$

$$\Downarrow$$

$$\int_E f \geq \limsup \int_E f_n$$

donde segue $\square$

14) Se $f \in L^+$, seja $\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$. Então λ é medida em $\mathcal{M}$. e p/ $g \in L^+$,

$$\int g \, d\lambda = \int f g \, d\mu$$

RESP)

Primeiro, é claro que $\lambda(E) \geq 0$.

Agora, sejam $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ família de conjuntos de $\mathcal{M}$ disjuntos. Então

$$f \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n} \text{ é sequência em } L^+ \text{ tq } f \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n} \uparrow f \chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$$

logo pelo T.C.M. $\int f \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = \lim_{N\to\infty} \int f \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n}$

Logo

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f \, d\mu$$

$$= \int f \chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} \, d\mu$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int f \chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n} \, d\mu$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{E_n} f \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$$

Finalmente $\lambda(\phi) = \int_\phi f \, d\mu = 0$. Logo λ é medida.

Agora, seja $g \in L^+$.

Se g é simples, $g = \sum_1^N a_n \chi_{E_n}$ então

$$\int g \, d\lambda = \sum_{n=1}^{N} a_n \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n \int_{E_n} f \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{E_n} a_n f \, d\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int a_n \chi_{E_n} f \, d\mu$$

N

$$= \int \sum_{n=1}^{?} a_n \chi_{E_n} f \, d\mu = \int g f \, d\mu$$

Logo, vale se g é simples.
Supondo $g \in L^+$ qualquer, temos que $\exists (g_n)_n \subset L^+$ sequência de funções simples, $g_n \leq g$ tal que $g_n \to g$ q.t.p. e $g_n \leq g_{n+1}$ e

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda$$

Mas daí

$$\int g \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int g_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int g_n f \, d\mu$$

Mas $g_n f \to g f$ q.t.p. e $g_n f \leq g_{n+1} f$
Logo, pelo Teorema da convergência monótona

$$\lim_{n \to \infty} \int g_n f \, d\mu = \int g f \, d\mu$$

donde $\int g \, d\lambda = \int g f \, d\mu$ $\square$

(18) Prove que o lema de Fatou continua válido se a hipótese $f_n \in L^+$ for substituída por f_n mensurável com $f_n \geq -g$, onde $g \in L^+ \cap \mathcal{L}^1$.
Qual o análogo do lema de Fatou p/ funções não positivas?

RESP:

Seja $g \in L^+ \cap \mathcal{L}^1$, $(f_n)_n$ mensurável, $f_n \geq -g$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Defina $h = \liminf f_n$. Então $h \geq -g$, logo

$$h^-(x) = \max\{-h(x), 0\} \leq g(x) \quad , \forall x \in X$$

Segue que $h^- \in \mathcal{L}^1$ e $g - h^- \in L^+$.
Similarmente, $f_n^- \in \mathcal{L}^1$ e $g - f_n^-, f_n + g \in L^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Logo, pelo lema de Fatou

$$\int h + \int g = \int h^+ - \int h^- + \int g$$

$$= \int h^+ + \int (g - h^-)$$

$$= \int (h+g)$$

$$= \int \liminf_{n\to\infty} (f_n + g)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n + g$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n^+ + \int (g - f_n^-) \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n^+ + \int g - \int f_n^- \right)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

Como $\int g < \infty$, segue que $\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int h \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$

Como queríamos.

Seja agora $(f_n)_n$ sequência de funções mensuráveis não positivas. Então $(-f_n)_n \in L^+$, logo, pelo lema de Fatou

$$\int \liminf_{n\to\infty} (-f_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)$$

$$\iff -\int \limsup_{n\to\infty} f_n \leq -\limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\iff \int \limsup_{n\to\infty} f_n \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

19 Suponha $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^1$ e $f_n \to f$ uniformemente.
a) Se $\mu(X) < \infty$ então $f \in \mathcal{L}^1$ e $\int f_n \to \int f$
b) Se $\mu(X) = \infty$ então (a) é falso.

RESP)
a) Suponha $f_n \to f$ unif. Então dado $\varepsilon = 1$, $\exists N, \forall n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall x \in X,$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| < 1 + |f_N(x)|$$

Logo

$$\int |f(x)| < \mu(X) + \int |f_N(x)| < \infty$$

Logo $f \in \mathcal{L}^1$. Além disso, temos que $f_n \to f$ q.t.p. e, $\forall n \geq N$,

$$|f_n(x)| < |f(x)| + 1$$

Onde $|f(x)| + 1 \in \mathcal{L}^1$ pois $\int |f(x)| + 1 = \|f\|_1 + \mu(X) < \infty$
Logo pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, $\int f_n \to \int f$ ∎

b) Considere $f_n = \frac{1}{n} \chi_{(0,n)}$
Então $f_n \to 0$ uniformemente, pois dado $\varepsilon > 0$, se $N \in \mathbb{N}$ tq $N > 1/\varepsilon$, então $1/n < \varepsilon$, $\forall n \geq N$ e logo

$$|f_n(x) - 0| \leq \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Mas $\int 0 = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n = \lim 1 = 1$.

(20) (Teorema da convergência dominada generalizado)
Se $f_n, g_n, f, g \in \mathcal{L}^1$, $f_n \to f$ e $g_n \to g$ q.t.p.,
com $|f_n| \leq g_n$ e $\int g_n \to \int g$, então $\int f_n \to \int f$

RESP)
Note que $g_n + f_n \in \mathcal{L}^+, \forall n$, $g_n - f_n \in \mathcal{L}^+, \forall n$,
assim, pelo lema de Fatou

$$\int g + \int f = \int (g+f) = \int \left(\lim_{n\to\infty} g_n + f_n\right)$$

$$= \int \liminf_{n\to\infty} (g_n + f_n)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n + f_n)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

$$= \int g + \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

$\int g < \infty$
$$\Rightarrow \int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n$$

Analogamente,

$$\int g - \int f = \int (g-f) = \int \lim (g_n - f_n)$$

$$= \int \liminf_{n\to\infty} (g_n - f_n)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int (-f_n)$$

$$= \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n$$

$$\overset{\int g < \infty}{\Longrightarrow} -\int f \leq -\limsup_{n\to\infty} \int f_n \Leftrightarrow \int f \geq \limsup \int f_n$$

$$\therefore \lim \int f_n = \int f \; \square$$

21) Suponha $f_n, f \in \mathcal{L}^1$, $f_n \to f$ q.t.p.
Então $\int |f_n - f| \to 0 \iff \int |f_n| \to \int |f|$

RESP|

Suponha que $\int |f_n - f| \to 0$.
Então

$$\limsup_{n\to\infty} \int |f_n| \leq \limsup_{n\to\infty} \int (|f_n - f| + |f|)$$

$$= \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|}_{=0} + \int |f|$$

$$= \int |f|$$

Reciprocamente,

$$\int |f| = \liminf \int |f| \leq \liminf \int (|f - f_n| + |f_n|)$$

$$= \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \int |f_n - f|}_{=0} + \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int |f_n|$$

Logo $\lim_{n\to\infty} \int |f_n| = \int |f|$

Agora, p/ a recíproca, suponha $\int |f_n| \to \int |f|$.
Então note que $|f_n - f| \to 0$ q.t.p. e que

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \quad , \forall n$$

Com $|f_n| + |f| \to 2|f| \in \mathcal{L}^1$ q.t.p. e

$$\lim_{n\to\infty} \int (|f_n| + |f|) = \left(\lim_{n\to\infty} \int |f_n|\right) + \int |f| = 2\int |f| = \int 2|f|$$

Logo, pelo exercício 20, concluímos que

$$\int |f_n - f| \longrightarrow \int 0 = 0 \quad \square$$

22) Seja μ a medida da contagem em $\mathbb{N}$. Interprete o lema de Fatou e monótona e da convergência dominada p/ séries.

RESP)

Note que se μ é a medida da contagem em $\mathbb{N}$, temos que

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, , \quad a_n = f(n)$$

Assim, o lema de Fatou fica:
Seja $(a_n^{(m)})_{n=1,m}^{\infty}$ sequência tal que $a_n^{(m)} \geq 0, \forall n \forall m$
Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \to \infty} a_n^{(m)} \leq \liminf_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}$$

O teorema da conv. monótona fica:
Seja $(a_n^{(m)})_{n=1,m}^{\infty}$ sequência tal que $a_n^{(m)} \geq 0, \forall n$
e $a_n^{(m)} \leq a_n^{(m+1)}$, $\forall n, m$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m \to \infty} a_n^{(m)} = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}$$

Finalmente, o teorema da conv. dominada fica:
Seja a $(a_n^{(m)})_{n=1}^{\infty}$ sequência tal que $|a_n^{(m)}| \leq b_n$, $\forall n, m$
onde $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(m)}$$

(26) Seja $f \in \mathcal{L}^1$ e $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$. Então F é contínua em $\mathbb{R}$.

De fato, seja $x_0 \in \mathbb{R}$ e tome $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x_n \to x_0$.
Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n(x) = f(x)\, \chi_{(-\infty, x_n)}(x)$$

Então é claro que $g_n(x) \to f(x)\, \chi_{(-\infty, x_0)}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$
e $|g_n(x)| \leq |f(x)| \in \mathcal{L}^1$
Segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int g_n \longrightarrow \int f(x)\, \chi_{(-\infty, x_0)}\, dx$$

Mas daí $F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f(x) = \int f(x)\, \chi_{(-\infty, x_n)} = \int g_n$

$$= \int g_n \longrightarrow \int f\, \chi_{(-\infty, x_0)} = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx = F(x_0)$$

Logo F é contínua em x_0 $\square$

(27) Seja $f_n(x) = a e^{-nax} - b e^{-nbx}$, onde $0 < a < b$

a) $\sum_1^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| dx = \infty$

b) $\sum_1^\infty \int_0^\infty f_n(x) dx = 0$

c) $\sum_1^\infty f_n \in L^1((0,+\infty))$ e $\int_0 \sum_1^\infty f_n(x) = \log(b/a)$

RES)

b) Note que

$$\int_0^\infty a e^{-nax} - b e^{-nbx} dx =$$

$$= -a \frac{1}{na} e^{-nax}\Big|_0^{+\infty} + b \frac{1}{nb} e^{-nbx}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0$$

Logo $\sum_1^\infty \int_0^\infty f_n(x) dx = \sum_1^\infty 0 = 0$

c) Temos $\sum_1^\infty f_n = \sum_{n=1}^{\infty} a e^{-nax} - \sum_{n=1}^{\infty} b e^{-nbx}$

$$= a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - b\frac{e^{-bx}}{1-e^{-bx}}$$

e

$$\int_0^{\infty} a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}}\,dx = \cancel{a}\int_1^0 \frac{u}{1-u}\cdot\frac{-1}{u\cancel{a}}\,du = \int_0^1 \frac{1}{1-u}\,du$$

$u = e^{-ax}$

$= -\log(1-u)\Big|_0^1$

$du = -a\,e^{-ax}dx$ e $\quad x \to +\infty \Rightarrow u \to 0$

$x \to 0^+ \Rightarrow u \to 1$

$= \infty$

$\Rightarrow dx = \frac{-1}{ua}du$

??? ...

(28) Compute, justificando:

a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1+ x/n)^{-n} \operatorname{sen}(x/n)\, dx$

RESP)

Note que

$$|(1+x/n)^{-n} \operatorname{sen}(x/n)| \leq |(1+x/n)^{-n}|$$

$\int_0^{\infty} (1+x/n)^{-n} < \infty$, p/ $n \geq 2$, $(1+x/n)^{-n}$

$$\lim_{n\to\infty} (1+x/n)^{-n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\log(1+x/n)}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x/n)}{-\frac{1}{n}}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-\frac{x}{n^2}}{1+x/n}}{\frac{1}{n^2}}}$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-x}{1+x/n}} = e^{-x}$$

e $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$

$$\int_0^{\infty} (1+x/n)^{-n} dx = n \int_0^{\infty} \frac{1}{n} (1+x/n)^{-n} dx$$

$$= n \frac{(1+x/n)^{-n+1}}{} \Big|^{+\infty}$$

$$-n+1 \qquad \Big|_0$$

$$= -\frac{n(1)}{-n+1} = \frac{-n}{1-n} = \frac{n}{n-1}$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1+x/n)^{-n} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$

Logo pelo teorema de convergência dominada generalizado

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} (1+x/n)^{-n} \operatorname{sen}(x/n)\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} (1+x/n)^{-n} \operatorname{sen}(x/n)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} 0\, dx = 0$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx$

Resp|

Se $x \in (0,1)$, e $n \in \mathbb{N}$, então $0 \leq (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} \leq 1$

pois

$$(1+x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^k = 1+nx^2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (x^2)^k$$

$$\geq 1+nx^2$$

Além disso, $\int_0^1 1\, dx = 1 < \infty$, logo, pelo teorema

Da convergência dominada

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}dx$$

$$= \int_0^1 0\,dx = 0$$

32 Suponha $\mu(X)<\infty$. Se $f,g: X\to\mathbb{C}$, defina

$$\rho(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu$$

Então ρ é métrica no espaço das funções mensuráveis onde $f=g$ se $f=g$ q.t.p. e $f_n\to f$ com respeito a ρ se e só se $f_n\to f$ em medida.

R)

De fato, temos $\rho(f,g)\geq 0$ e $\rho(f,g)=0 \iff \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}d\mu = 0$

Mas $\frac{|f-g|}{1-|f-g|}\geq 0$, logo isso implica $\frac{|f-g|}{1-|f-g|}=0$ q.t.p. $\Rightarrow |f-g|=0$ q.t.p.

$\Rightarrow f=g$ q.t.p.

Claramente, $\rho(f,g)=\rho(g,f)$

Finalmente, note que se

$f(x) = \frac{x}{1+x}$, então $f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

logo f é crescente, portanto, como

$$|f(x)-g(x)| \leq |f(x)-h(x)| + |h(x)-g(x)|$$

temos

$$\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \leq \frac{|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|}{1+|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|}$$

$$= \frac{|f(x)-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|} + \frac{|h(x)-g(x)|}{1+|f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)|}$$

$$\leq \frac{|f(x-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|} + \frac{|h(x)-g(x)|}{1+|h(x)-g(x)|}$$

$$\Rightarrow \rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

Logo ρ é métrica

Suponha agora que $f_n \xrightarrow{\rho} f$

Se $f_n \not\to f$ em medida, então $\exists\, \delta, \varepsilon > 0$ tais que, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \geq N$ tq $\mu(\underbrace{\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}}_{\doteq E_{n,\varepsilon}}) \geq \delta$.

Logo, $\forall N$, $\exists\, n \geq N$

$$D(f_n,f) \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} = \int_{E_{n,\varepsilon}} \frac{1+|f_n-f|-1}{1+|f_n-f|} = \int_{E_{n,\varepsilon}} 1 - \frac{1}{1+|f_n-f|}$$

$$\geq \int_{E_{n,\varepsilon}} 1 - \frac{1}{1+\varepsilon} = \int_{E_{n,\varepsilon}} \frac{\cancel{1}+\varepsilon-\cancel{1}}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(E_{n,\varepsilon})$$

$$\geq \frac{\varepsilon\delta}{1+\varepsilon} > 0$$

pois $|f_n-f| \geq \varepsilon \Rightarrow 1+|f_n-f| \geq 1+\varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+|f_n-f|} \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{1+|f_n-f|} \geq -\frac{1}{1+\varepsilon}$$

uma contradição. Logo, $f_n \to f$ em medida.

Reciprocamente, se $f_n \to f$ em medida, $\forall \eta > 0$, $\exists N$, tq $\forall n \geq N$

$$\mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \eta$$

Em particular, tomando $\eta = \varepsilon$, temos, $E_{n,\varepsilon} = \{x \in X \mid |f_n(x)-f(x)| \geq \varepsilon\}$

$$D(f_n,f) = \int_{E^c_{n,\varepsilon}} \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} + \int_{E^c_{n,\varepsilon}} \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}$$

Agora note que, para $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq x$, logo

$$\int_{E^c_{n,\varepsilon}} \frac{|f-f|}{1+|f_n-f|} \leq \int_{E^c_{n,\varepsilon}} |f_n-f| < \varepsilon(\mu(E^c_{n,\varepsilon}))$$

$$= \varepsilon(\mu(X) - \mu(E_{n,\varepsilon}))$$

Além disso, como, para $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq 1$, temos

$$\int_{E_{n,\varepsilon}} \frac{|f_n - f|}{1+|f_n-f|} \leq \int_{E_{n,\varepsilon}} 1 = \mu(E_{n,\varepsilon})$$

Logo

$$\begin{aligned} \rho(f_n,f) &\leq \varepsilon(\mu(X) - \mu(E_{n,\varepsilon})) + \mu(E_{n,\varepsilon}) \\ &< \varepsilon(\mu(X) - \varepsilon) + \varepsilon \\ &= \varepsilon(\mu(X) + 1 - \varepsilon) \end{aligned}$$

Logo $\rho(f_n,f) \longrightarrow 0$

Ex 3.6) Se $\mu(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\chi_{E_n} \longrightarrow f$ em L^1 então f é q.t.p. igual a uma função característica de um conjunto mensurável.

RESP)

Como $\chi_{E_n} \longrightarrow f$ em L^1, então existe subsequência $\chi_{E_{n_k}} \longrightarrow f$ q.t.p. Como $\chi_{E_{n_k}}$ assume apenas os valores 0 e 1, segue que f também, pois dado $\varepsilon > 0$, temos que, p/ q.t.p. x, $\exists K = K_x$ tq $\forall k \geq K_x$
$|\chi_{E_{n_k}}(x) - f(x)| < 1/2 \Rightarrow |f(x)| < \chi_{E_{n_k}}(x) \pm \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - \{1,0\}| < \varepsilon \Rightarrow f(x) = 1$ ou $f(x) = 0$

Mais ainda, como $f_{n_k} \to f$ q.t.p. f é mensurável.

Logo, pondo $E = f^{-1}(\{1\})$, temos E mensurável e $f(x) = \chi_E$ $\square$

37) Suponha que $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ são mensuráveis e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) Se ϕ é contínua e $f_n \to f$ q.t.p., então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ q.t.p.

b) Se ϕ é unif. contínua e $f_n \to f$ uniformemente, quase uniformemente ou em medida, então $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ uniformemente, quase uniformemente ou em medida, resp.

c) Não vale caso as hipóteses de continuidade do ϕ não sejam satisfeitas.

RESP)

a)

Como $f_n \to f$ q.t.p., então, $\exists\, E \subset X$, $\mu(E) = 0$ tal que $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E^c$. Logo, como ϕ é contínua, $\forall x \in E^c$ $\phi \circ f_n(x) \to \phi \circ f(x)$, logo $\phi \circ f_n$ converge q.t.p. p/ $\phi \circ f$.

b) Suponha $f_n \to f$ uniformemente. Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$

Logo, dado $\varepsilon>0$, como ϕ é unif. contínua, $\exists\, \delta>0$ tq,

$\forall y, z \in \mathbb{C}$, $|y-z|<\delta \Rightarrow |\phi(y)-\phi(z)|<\varepsilon$

Logo, seja $N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N$, $|f_n(x)-f(x)|<\delta$

Então, $\forall n\geq N$, $\forall x\in X$

$$|\phi\circ f_n(x) - \phi\circ f(x)| < \varepsilon$$

logo $\phi\circ f_n \to \phi\circ f$ uniformemente.

Suponha $f_n\to f$ quase uniformemente. Então $\exists\, E\subset X$, tq $f_n\to f$ unif. em E^c. Segue do item anterior que $\phi\circ f_n \to \phi\circ f$ unif. em $E^c \Rightarrow \phi\circ f_n\to\phi\circ f$ quase uniformemente em X.

Suponha agora que $f_n\to f$ em medida.

Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall y,z\in\mathbb{C}$, $|y-z|<\delta \Rightarrow |\phi(y)-\phi(z)|<\varepsilon$, (*)

além disso, $\exists N$, $\forall n\geq N$

$$\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}}_{E_{n,\delta,f}}) < \varepsilon \quad (**)$$

<u>AF</u>: $$\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|\geq\varepsilon\}}_{E_{n,\varepsilon,\phi}}) < \varepsilon$$

De fato, note que

$$x\in E_{n,\varepsilon,\phi} \Rightarrow |\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|\geq\varepsilon \overset{(*)}{\Rightarrow} |f_n(x)-f(x)|\geq\delta \overset{(**)}{\Rightarrow} x\in E_{n,\delta,f}$$

logo $\mu(E_{n,\varepsilon,\phi}) \leq \phi(E_{n,\delta,f}) < \varepsilon$

Logo, segue do ex 35 que $\phi\circ f_n\to\phi\circ f$ em medida $\square$

c) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f_n(x)=2^{-n}$ e $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,

$$\phi(z)=\begin{cases}1, & \text{se } Re(z)>0\\ -1, & \text{se } Re(z)\leq 0\end{cases}$$

Então $f_n\to 0$ q.t.p., mas $\phi(f_n(x))=1 \Rightarrow \phi(f_n(x))\not\to -1=\phi(0)$

Agora seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x)=x$ e $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$f_n(x)\doteq x+2^{-n}$$

Então é claro que $f_n\to f$ unif., quase unif. e em medida.

Defina $\phi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\phi(z)=z^2$.

Seja $E\subset\mathbb{R}$ e suponha que $\phi\circ f_n\to\phi\circ f$ unif. em E.

Então $\exists N, \forall n\geq N$, $|\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|<1$, $\forall x\in E$.

Como

$$1>|\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|=|\underbrace{(x+2^{-N})^2}_{x^2+2^{1-N}x+2^{-2N}}-x^2|$$
$$=|2^{1-N}x+2^{-2N}|\quad,\forall x\in E$$

$\Rightarrow 2^{1-N}|x|<1+2^{-2N}$

$\Rightarrow |x|<2^{N-1}+2^{N-1-2N}=2^{N-1}+2^{-N-1}$

i.e.: $x\in(-2^{N-1}-2^{-N-1}, 2^{N-1}+2^{-N-1})$

$\Rightarrow E\subset(-2^{N-1}-2^{-N-1}, 2^{N-1}+2^{-N-1})$

$\Rightarrow \mu(E^c)=+\infty\neq 0$

$\Rightarrow$ logo, $\phi\circ f_n\not\to\phi\circ f$ quase unif., nem unif. em $\mathbb{R}$.

Finalmente, se $\varepsilon>0$, e $n\in\mathbb{N}$, então

$$[2^{n-1}\varepsilon,\infty)\subseteq\{x\in\mathbb{R}\mid |\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|\geq\varepsilon\}$$

pois

$$|\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)| = 2^{1-n}x + 2^{-2n} \geq \varepsilon + 2^{-2n}, \quad \forall x \in [2^{n-1}\varepsilon, \infty)$$

Logo

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in\mathbb{R} \mid |\phi\circ f_n(x)-\phi\circ f(x)|\}) = \infty$$

Logo $\phi\circ f_n \not\to \phi\circ f$ em medida.

$\boxed{\text{Ex 38}}$

Suponha que $f_n \to f$ em medida e $g_n \to g$ em medida.

a) $f_n+g_n \longrightarrow f+g$ em medida

b) $f_n g_n \longrightarrow fg$ em medida se $\mu(X)<\infty$, mas não necessariamente se $\mu(X)=\infty$

RESP)

a) Dado $\varepsilon>0$, $\exists N$ tq $\forall n \geq N$

$$\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |f_n(x)-f(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}}_{E^f_{n,\varepsilon/2}}) < \varepsilon/2$$

e

$$\mu(\underbrace{\{x\in X \mid |g_n(x)-g(x)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\}}_{\doteq E^g_{n,\varepsilon/2}}) < \varepsilon/2$$

logo, se $x \in (E^f_{n,\varepsilon/2})^c \cap (E^g_{n,\varepsilon/2})^c$

$$|f_n(x)+g_n(x)-(f(x)+g(x))| = |f_n(x)-f(x)+g_n(x)-g(x)|$$
$$\leq |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

isto é, $x\in (E^f_{n,\varepsilon/2})^c \cap (E^g_{n,\varepsilon/2})^c = (E^f_{n,\varepsilon/2}\cup E^g_{n,\varepsilon/2})^c \Rightarrow x\in (E^{f+g}_{n,\varepsilon})^c$

onde
$$E^{f+g}_{n,\varepsilon} = \{x\in X \mid |f_n+g_n(x) - f+g(x)| \geq \varepsilon\}$$

logo
$$(E^f_{n,\varepsilon/2}\cup E^g_{n,\varepsilon/2})^c \subset (E^{f+g}_{n,\varepsilon})^c$$
$$\Downarrow$$
$$E^{f+g}_{n,\varepsilon}\subset E^f_{n,\varepsilon/2}\cup E^g_{n,\varepsilon/2}$$
$$\Rightarrow \mu(E^{f+g}_{n,\varepsilon}) \leq \mu(E^f_{n,\varepsilon/2}) + \mu(E^g_{n,\varepsilon/2}) < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

Logo $f_n+g_n \longrightarrow f+g$ em medida pelo ex. 35.

b) Na mesma notação do item (a) seja N t.q. $\forall n\geq N$
$\mu(E^f_{n,\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$, $\mu(E^g_{n,\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$,
Note que, se $x\in (E^f_{n,\varepsilon/2})^c \cap (E^g_{n,\varepsilon/2})^c$, então

$$|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| = |f_n(x)g_n(x)-f_n(x)g(x)+f_n(x)g(x)-f(x)g(x)|$$
$$\leq |f_n(x)||g_n(x)-g(x)|+|f_n(x)-f(x)||g(x)|$$
$$\leq |f_n(x)|\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}|g(x)| \;(*)$$

Mas $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f_n(x)| < |f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}$, logo

$$(*) \leq \left(|f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}|g(x)|$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(|f(x)| + |g(x)| + \varepsilon/2\right) \quad (\star)$$

$\underline{AF}$: Dado $\eta > 0$, $\exists M_\eta \geq 0$, t.q. $\mu(\underbrace{\{x \in X \mid |f(x)| \geq M_\eta\}}_{F^f_\eta}) < \eta$
idem p/ g.

Suponha que vale a AF. Então, se
$$x \in (E^f_{n,\varepsilon/2})^c \cap (E^g_{n,\varepsilon/2})^c \cap (F^f_{\varepsilon/2})^c \cap (F^g_{\varepsilon/2})^c$$
Então, pelo acima $(\star)$, temos
$$|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{3\varepsilon^2}{4}$$
isto é
$$x \in \left(E^{fg}_{n,\frac{3\varepsilon^2}{4}}\right)^c$$
logo,
$$(E^f_{n,\varepsilon/2})^c \cap (E^g_{n,\varepsilon/2})^c \cap (F^f_{\varepsilon/2})^c \cap (F^g_{\varepsilon/2})^c \subset \left(E^{fg}_{n,3\varepsilon^2/4}\right)^c$$

$$\Rightarrow E^{fg}_{n,3\varepsilon^2/4} \subset E^f_{n,\varepsilon_2} \cup E^g_{n,\varepsilon_2} \cup F^f_{\varepsilon/2} \cup F^g_{\varepsilon/2}$$

$$\Rightarrow \mu\left(E^{fg}_{n,3\varepsilon^2/4}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon$$

isto é, $\lim_{n\to\infty} \mu\left(E^{fg}_{n,3\varepsilon^2/4}\right) = 0 \Rightarrow f_n g_n \to fg$ em medida.

Vejamos que vale a afirmação.
De fato, seja $E_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$
Então $E_{n+1} \subset E_n$, $\forall n$ e como $\mu(X) < \infty$, $\mu(E_1) < \infty$
Logo, vale que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{j=1}^{n} E_n\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)$

Mas $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \emptyset$, logo $\mu(E_n) \to 0$ p/ $n \to +\infty$.
Segue que dado $\eta > 0$, $\exists N$, tq $\forall n \geq N$, $\mu(E_n) < \eta$,
logo, basta tomar $M_\eta = E_N$.

Para um contraexemplo caso $\mu(X) = \infty$, seja
$X = \mathbb{R}$ e $f_n(x) = 1/n \, \chi_{(0,n)}$ e $g_n(x) = x$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Note que $f_n \to 0$ em medida, pois dado $\varepsilon > 0$, para
$n > 1/\varepsilon$, temos

$\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\quad \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid |\frac{1}{n}\chi_{(0,n)}(x)| \geq \varepsilon\} = \emptyset$

logo, $\forall n \geq N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$, temos
$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| > \varepsilon\}) = \mu(\emptyset) = 0 \to 0$$

Porém note que $f_n g_n \not\to 0 = fg$.
De fato, para $\varepsilon = 1/2$,
$$\{x \in \mathbb{R} \mid |f_n g_n(x)| \geq 1/2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid \tfrac{|x|}{n}\chi_{(0,n)}(x) \geq 1/2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x|\chi_{(0,n)}(x) \geq \tfrac{n}{2}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq n/2 \text{ e } x \in (0,n)\} = (n/2, n)$$

logo

$$\mu(\{x\in\mathbb{R} \mid |f_n g_n(x)| \geq 1/2\}) = \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty \text{ p/ } n\to\infty$$

$\boxed{\text{Ex 39}}$

Se $f_n \to f$ quase uniformemente, então $f_n \to f$ q.t.p. e em medida.

RESP

Dado $\varepsilon = 1/n$, $\exists\, E_n$, $\mu(E_n) < \varepsilon = \frac{1}{n}$ e $f_n \to f$ unif. em E_n^c
em particular, $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, $\forall x \in E_n^c$.
Além disso, podemos tomar E_n t.q. $E_{n+1} \subset E_n$
De fato, se $f_n \to f$ unif. em E_n^c e $f_n \to f$ em E_{n+1}^c
então $f_n \to f$ unif. em $E_n^c \cup E_{n+1}^c = (E_n \cap E_{n+1})^c$
além disso, $\mu(E_n \cap E_{n+1}) \leq \mu(E_{n+1}) < 1/(n+1)$,
logo, se $E_{n+1} \not\subset E_n$, tome $E_{n+1}' = E_n \cap E_{n+1}$.
Daí continua valendo o que queríamos como acima.
Logo, temos $E_{n+1} \subset E_n$, $\mu(E_n) < 1/n$.
Note que $\mu(E_1) < 1 < \infty$, logo, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

Mas daí $0 \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

logo $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$. Tome $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.
Então $\mu(E) = 0$ e se $x \in E^c \Rightarrow x \in \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c$
$\Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \Rightarrow x \in E_{n_0}^c$, p/ algum $n_0 \in \mathbb{N}$,
logo $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.
Segue que $f_n \to f$ q.t.p.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, temos que $\exists E \subset X$, $\mu(E) < \varepsilon$ e
$f_n \longrightarrow f$ unif. em E^c.
Mas daí, $\exists N$, $\forall n \geq N$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad , \forall x \in E^c$$

$$\Rightarrow \quad \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset E$$

$$\Rightarrow \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(E) < \varepsilon$$

logo $f_n \to f$ em medida, pelo ex 35. $\square$

$\boxed{\text{Ex 40}}$: Suponha que $f_1, f_2, \ldots, f : X \to \mathbb{C}$ são mensuráveis tal que $f_n \to f$ q.t.p. e $|f_n| \leq g \in L^1$, $\forall n$. Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists E \subset X$ t.q. $\mu(E) < \varepsilon$ e $f_n \longrightarrow f$ unif. em E^c
($f_n \to f$ quase uniformemente).

RESP) Seja E tal que $f_n \to f$, $\forall x \in E^c$, $\mu(E)=0$
Então $|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x \in E^c$.
Fixado $k \in \mathbb{N}$, p/ cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in E^c \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{2}{k}\}$$

Se $x \in E_1(k)$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tq

$$|f_m(x) - f(x)| \geq 2/k$$

e logo

$$2g(x) \geq |f_m(x)| + |f(x)| \geq 2/k$$

Logo

$$\frac{1}{k}\chi_{E_1(k)} \leq g$$

logo $\frac{1}{k}\chi_{E_1(k)} \in L^1 \Rightarrow \mu(E_1(k)) < \infty$

Como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n(k) = \{x \in E^c \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n \; |f_m(x) - f(x)| \geq 2/k\}$
$= \{x \in E^c \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$

Logo $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n(k) = \emptyset$

Segue que $\lim_{n \to \infty} \mu(E_n(k)) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k)) = \mu(\emptyset) = 0$

Agora, seja $\varepsilon > 0$ e p/ cada $k \in \mathbb{N}$, tome $n_k \in \mathbb{N}$ tal que
$\mu(E_{n_k}(k)) < 2^{-k}\varepsilon$

Defina $F = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k}(k) \right) \cup E$

Então

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k}(k) \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_{n_k}(k)\right) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varepsilon = \varepsilon$$

e, para cada $\delta > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que
$2/k < \delta$

Daí

$$|f_n(x) - f(x)| < 2/k < \delta \quad , \forall x \in F^c, \forall m \geq n_k$$

de fato,

$$F^c = E^c \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_{n_k}(k)^c$$

Logo $f_n(x) \to f(x)$ e $x \in E_{n_k}(k)^c$, $\forall k$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{m=n_k}^{\infty} \{x \in E^c \mid |f_m(x) - f(x)| \geq 2/k\}^c$$

$$\Rightarrow \forall m \geq n_k, |f_m(x) - f(x)| < 2/k < \delta$$

Logo, $f_n \to f$ unif. em F^c e $\mu(F) < \varepsilon$ $\square$

Ex42) Seja μ a medida da contagem em $\mathbb{N}$.
Então $f_n \to f$ em medida $\iff f_n \to f$ uniformemente.

RESP)

De fato, sejam $f_n, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_m(n) = a_n^{(m)}$, $f(n) = a_n$

Então

$$f_n \to f \text{ em medida}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,$$
$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon\}) \to 0 \text{ p/ } m \to \infty$$
$$\| $$
$$\#\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon\}$$

e

$$f_n \to f \text{ unif.}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall m \geq M,$$
$$|f_m(n) - f(n)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\iff |a_n^{(m)} - a_n| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Suponha que não. Então $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall M \in \mathbb{N}, \exists m \geq M, n_m \in \mathbb{N}$

$$|a_{n_m}^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon$$

logo, tomando $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\forall M, \exists m \geq M$ t.q. $n_m \in \{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon\}$, logo

$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon\}) \geq \underset{\#\{n_m\}}{\underset{\|}{1}} > 0$$

Logo $f_n \not\to f$ em medida $\Rightarrow\Leftarrow$.

Reciprocamente, suponha que $f_n \to f$ unif.
e, por absurdo, que $f_n \not\to f$ em medida.
Então $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tq

$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon_0\}) \not\to 0 \text{ p/ } m \to \infty$$

isto é, $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ tq $\forall M \in \mathbb{N}$, $\exists\, m \geq M$ tal que

$$\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon_0\}) \geq \varepsilon_1 > 0$$

Mas daí, $\mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon_0\}) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu(\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon_0\}) \geq 1$$

pois $\operatorname{Im}(\mu) \subset \mathbb{N}$.
Logo, pela def. de μ, $\exists\, n_m \in \mathbb{N}$ tq

$$|a_{n_m}^{(m)} - a_n| \geq \varepsilon_0$$

isto é, $\exists\, n_{m_k}$, $m_k \to +\infty$, $n_{m_k} \to +\infty$ tais que

$$|a_{n_{m_k}}^{(m_k)} - a_n| \geq \varepsilon_0$$

Um absurdo, pois pela conv. unif. deveríamos ter, $\forall k$ suf. grande

$$|a_{n_{m_k}}^{(m_k)} - a_n| < \varepsilon$$

Logo $f_n \to f$ em medida $\square$

$\boxed{\text{Ex 41}}$ Se μ, σ-finita e $f_n \to f$ q.t.p. então existem $E_1, E_2, \ldots \subset X$ mensuráveis tais que

$$\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) = 0$$

e $f_n \to f$ uniformemente em cada E_j

RESP)

Suponha primeiro que $\mu(X)$ é finita.
Por Egoroff, p/ cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists\, E_k$, com $\mu(E_k^c) < 2^{-k}$ e $f_n \to f$ unif. em E_k.
Tome $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Então $F_{n+1} \supset F_n$, $\forall n$, logo $F_{n+1}^c \subset F_n^c$, $\forall n$

Além disso, $F_n^c = \bigcap_{j=1}^{n} E_j^c$

$$\mu(F_n^c) \leq \mu(E_n^c) < 2^{-n}$$

Como $\mu(F_1^c) \leq \mu(X) < \infty$, então

$$\mu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j^c\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^c\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(F_j^c) = 0$$

e $f_n \to f$ unif. em cada E_j

Se X é σ-finito, seja $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ tq $\mu(X_k) < \infty$, $\forall k$.
Então, $\forall i$, $\exists\, \{E_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ tq

$\mu\left(X_i \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^i\right)\right) = 0$ e $f_n \to f$ unif. em cada E_k^i.

Então, considere

$\{E_k^i\}_{k,i=1}^{\infty}$; Temos $f_n \to f$ unif. em cada E_k^i e

$$\mu\left(\left(\bigcup_{i,k=1}^{\infty} E_{k,i}\right)^c\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(X_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^i\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(X_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^i\right) = 0$$

$\square$

$\boxed{\text{Ex 43}}$: Suponha que $\mu(X) < \infty$ e $f: X \times [0,1] \to \mathbb{C}$ é tal que $f(\cdot, y)$ é mensurável, $\forall y \in [0,1]$ e $f(x, \cdot)$ é contínua, para cada $x \in X$.

a) Se $0 < \varepsilon, \delta < 1$, então

$$E_{\varepsilon,\delta} = \{x \in X \mid |f(x,y) - f(x,0)| \le \varepsilon, \forall y < \delta\}$$

é mensurável

b) Para qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists\, E \subset X$ tal que $\mu(E) < \varepsilon$ e $f(\cdot, y) \to f(\cdot, 0)$ uniformemente em E^c, p/ $y \to 0$

RESP)

(a) Seja $\mathbb{Q} \cap [0, \delta)$ enumerado por $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Defina
$$E_{\varepsilon,n} \doteq \{x \in X \mid |f(x, y_n) - f(x,0)| \leq \varepsilon\}$$
Note que $f(x, y_n)$ e $f(x,0)$ são mensuráveis, logo
$g_n(x) = |f(x, y_n) - f(x,0)|$ é mensurável.
Logo $E_{\varepsilon,n} = g^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ é mensurável.
Considere
$$E \doteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{\varepsilon,n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid |f(x, y_n) - f(x,0)| \leq \varepsilon\}$$

Então E é mensurável e claramente $E_{\varepsilon,\delta} \subset E$.
Agora suponha $x \in E$. Então $|f(x, y_n) - f(x,0)| \leq \varepsilon$, $\forall y_n$
Seja $y \in [0, \delta)$. Então $\exists (y_{n_k})_k$, tal que $y_{n_k} \to y$.
Como $|f(x, y_{n_k}) - f(x,0)| \leq \varepsilon$, $\forall y_{n_k}$ e $f(x, \cdot)$ é ctna
temos $|f(x,y) - f(x,0)| \leq \varepsilon$ e logo $x \in E_{\varepsilon,\delta}$. Logo
$E = E_{\varepsilon,\delta}$ e logo E é mensurável.

(b)

Para cada, $k, n \in \mathbb{N}$, seja $y_n \to 0$, $\{y_n\}_n \subset [0, 1]$ e
$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X \mid |f(x, y_m) - f(x,0)| > \frac{1}{k}\}$$

logo, $E_{n+1} \subset E_n$ e

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \{x \in X \mid \forall n, \exists m \geq n \mid f(x, y_m) - f(x,0)| > \frac{1}{k}\}$$

$$= \emptyset$$

pela $f(x,\cdot)$ é contínua em 0, $\forall x$.

Como $\mu(X) < \infty$, temos que

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n(k))$$

Logo dado $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$$

Seja $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. Então $\mu(E) < \varepsilon$

e note que, p/ $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in E^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} E^c_{n_k}(k) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=n_k}^{\infty} \{x \in X \mid |f(x, y_m) - f(x,0)| \leq \frac{1}{k}\}$$

$$= \{x \in X \mid |f(x,y_m) - f(x,0)| \leq 1/k, \forall m \geq n_k, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

Em particular, dado $\varepsilon < 1/k$, $\forall m \geq n_k$, $\forall x \in E^c$

$$|f(x, y_m) - f(x,0)| < \varepsilon$$

Logo $f(\cdot, y_m) \longrightarrow f(\cdot, 0)$ unif. em E^c

$\Rightarrow f(\cdot, y) \longrightarrow f(\cdot, 0)$ unif em E^c, p/ $y \to 0^+$. $\square$

Ex 44 (TEOREMA DE LUSIN)
Se $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ é mensurável e $\varepsilon>0$, $\exists\, E\subset[a,b]$ compacto tal que $\mu(E^c)<\varepsilon$ e $f|_E$ é contínua.

Dem)
Para cada $n\in\mathbb{N}$, defina
$$E_n=f^{-1}(B(0,n))=\{x\in[a,b]\mid |f(x)|<n\}$$
Então $E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_n\subset E_{n+1}\subset\ldots$ e logo
$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu([a,b])$$
logo $\exists\, m\in\mathbb{N}$ tq $\mu([a,b])-\mu(E_m)<\varepsilon/3$
Defina
$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E_m\\ 0, & x\in E_m^c\end{cases}$$
Então $|g|\le m\chi_{E_m}\le m\chi_{[a,b]}\Rightarrow g\in L^1(\mathbb{R})$
Logo, p/ cada $n\in\mathbb{N}$, $\exists\, g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ com suporte compacto e contínuas, tais que
$$\|g_n-g\|_1<1/n$$

Claramente, $g_n\to g$ em medida, logo $\exists\,(g_{n_k})_k$, $g_{n_k}\to g$ q.t.p.
Restringindo as funções a $[a,b]$,

pelo teorema de Egoroff $\exists F \subset [a,b]$ tal que $\mu(F) < \varepsilon/3$ e $g_{n_k} \to g$ unif. em $[a,b] \setminus F$

Logo existe compacto $E \subset E_m \setminus F$ tal que

$$\mu(E) > \mu(E_m \setminus F) - \varepsilon/3$$

e logo

$$\mu([a;b] \setminus E) = \mu([a,b]) - \mu(E)$$

$$< \mu([a,b]) - \mu(E_m \setminus F) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\leq \mu([a,b]) + \mu(F) - \mu(E_m) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Mais ainda, $g_{n_k} \to g$ unif em E, logo $f|_E = g|_E$ é contínua $\square$