3) Se $1 \leq p < r \leq \infty$, então $L^p \cap L^r$ é espaço de Banach com a norma $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$. Se $p < q < r$, a inclusão $L^p \cap L^r \to L^q$ é contínua.

Resp)

De fato, suponha $(f_n)_n$ de Cauchy em $L^p \cap L^r$ com essa norma. Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N, \forall n, m \geq N$,

$$\|f_n - f_m\|_p + \|f_n - f_m\|_r < \varepsilon$$

$\Rightarrow (f_n)$ é de Cauchy em L^p e em L^r. Como esses são completos, temos $f_n \to \overline{f}$ em L^p e $f_n \to \overline{\overline{f}}$ em L^r. Assim existe subseq. f_{n_k}, $f_{n_k} \to \overline{f}$ q.t.p. Além disso, $\exists f_{n_{k_i}}$ tal que $f_{n_{k_i}} \to \overline{\overline{f}}$ q.t.p. Segue que $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$ q.t.p.

Daí

$$\|f_n - \overline{f}\| = \|f_n - \overline{f}\|_p + \|f_n - \overline{f}\|_r \to 0$$

Logo $f_n \to \overline{f}$ em $L^p \cap L^r$ com essa norma e logo é completo.

Para ver que a inclusão é contínua basta mostrar que

$$\|f\|_q \leq C(\|f\|_p + \|f\|_r) = C(\|f\|)$$

Temos que $\exists \lambda \in (0,1)$ onde $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda} \|f\|_r^{1-\lambda}$$

Assim, supondo que $\|f\| \leq 1 \Rightarrow \|f\|_p \leq 1$ e $\|f\|_r \leq 1$

Logo $\|f\|_q \leq 1^{\lambda}\, 1^{1-\lambda} = 1$

Assim dado $f \in L^p \cap L^r$ qualquer, temos $\left\| \frac{f}{\|f\|} \right\| = 1$, logo

$$\left\| \frac{f}{\|f\|} \right\|_q \leq 1$$

Daí

$$\|f\|_q \leq \|f\| \quad \square$$

Exercício 9

Suponha $1 \leq p < \infty$. Se $\|f_n - f\|_p \to 0$, então $f_n \to f$ em medida e logo alguma subseq. converge para f q.t.p. Por outro lado, se $f_n \to f$ em medida e $|f_n| \leq g \in L^p$, $\forall n$, então $\|f_n - f\|_p \to 0$

Dem.) Suponha $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_p < \varepsilon^{(p+1)/p}$, $\forall n \geq N$.

Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, se $E = \{x \in X;\, |f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p\}$, então
$= \{x \in X;\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

$$\mu(E)\varepsilon^p = \int_E \varepsilon^p \leq \int_E |f_n - f|^p \leq \int |f_n - f|^p < \varepsilon^{\frac{(p+1)p}{p}} = \varepsilon^{p+1}$$

logo $\mu(E) < \varepsilon$ e logo $f_n \to f$ em medida.

Reciprocamente, seja $(f_n)_n$ t.q. $f_n \to f$ em medida e que $\exists g \in \mathcal{L}^p$, $|f_n| \leq g$, $\forall n$.
Se $(f_{n_k})_k$ é subsequência, então esta converge p/ f em medida, logo, tem subsubsequência $(f_{n_{k_j}})_j$ t.q. $f_{n_{k_j}} \to f$ q.t.p.
Segue que $|f_{n_{k_j}}|^p \to |f|^p$ q.t.p., logo, pelo Teorema da convergência dominada, $|f|^p \in \mathcal{L}^1$, logo $f \in \mathcal{L}^p$ (pois $|f_n|^p \leq g^p$ e $g^p \in \mathcal{L}^1$)
Além disso, $|f_{n_{k_j}} - f|^p \to 0$ q.t.p. e como

$$|f_{n_{k_j}} - f|^p \leq 2^p(g^p + |f|^p), \forall j$$

pelo teorema da convergência dominada temos que $\|f_{n_{k_j}} - f\|_p^p \to 0 \Rightarrow \|f_{n_{k_j}} - f\|_p \to 0$.
Logo, toda subsequência de $\|f_n - f\|_p$ tem subsubseq. que converge a 0, logo $\|f_n - f\|_p \to 0$ $\square$

Exercício 10

Suponha $1 \leq p < \infty$. Se $f_n, f \in \mathcal{L}^p$ e $f_n \to f$ q.t.p. então $\|f_n - f\|_p \to 0$ se e só se $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$

Dem.) Suponha que $\|f_n - f\|_p \to 0$.
Então

$$\|f_n\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f\|_p$$

Logo $\limsup \|f_n\|_p \leq \|f\|_p$

Além disso,

$$\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p$$

Logo $\liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$

Donde

$$\lim \|f_n\|_p = \|f\|_p$$

Agora suponha $f_n \to f$ q.t.p. e $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$

Como

$$|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$$

e $\quad |f_n - f|^p \longrightarrow 0 \in L^1$ q.t.p.

$$2^p(|f_n|^p + |f|^p) \longrightarrow 2^p(|f|^p + |f|^p) = 2^{p+1}|f|^p \in L^1$$

q.t.p.

(pela hipótese) e

$$\lim_{n\to\infty} \int 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = 2^p \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p^p + 2^p\|f\|_p^p$$

$$= 2^p\left(\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p\right)^p + 2^p\|f\|_p$$

$$= 2^p(\|f\|_p^p) + 2^p(\|f\|_p^p) = \int 2^{p+1}|f|^p$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada generalizada

$\|f_n - f\|_p^p \to 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0 \square$

Exercício 11 Defina

$$R_f = \{ z \in \mathbb{C} ; \{x : |f(x) - z| < \varepsilon\} \text{ tem medida positiva}, \forall \varepsilon > 0 \}$$

a) R_f é fechado

b) Se $f \in L^\infty$, então R_f é compacto e $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$

Dem.)

a) De fato, seja $(z_n)_n \subset R_f$, $z_n \to \bar{z}$.
Então dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geq N$

$$|z_n - \bar{z}| < \varepsilon/2$$

Além disso, $z_N \in R_f$ implica que

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - z_N| < \tfrac{\varepsilon}{2}\}) = \delta > 0$$

Mas $\textcircled{A} = \{x \in X ; |f(x) - z_N| < \frac{\varepsilon}{2}\}) \subset \{x \in X \,|\, f(x) - \bar{z}| < \varepsilon\} = \textcircled{B}$

De fato, se $x \in \textcircled{A}$, temos

$$|f(x) - \bar{z}| \leq |f(x) - z_N| + |z_N - \bar{z}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo $x \in \textcircled{B}$. Segue que

$$\mu(\{x \in X \,|\, f(x) - \bar{z}| < \varepsilon\}) \geq \delta > 0$$

Logo $\bar{z} \in R_f$ $\square$

b) De fato, suponha que R_f não é limitado.
Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists R_n \geq n$, $R_n \in R_f$
Mas daí, tomando $\varepsilon = 1$, temos que

$$\mu(\{x : |f(x) - R_n| < 1\}) > 0$$

Mas $|f(x) - R_n| < 1 \Rightarrow -1 < f(x) - R_n < 1$

$$\Rightarrow f(x) > R_n - 1 \Rightarrow |f(x)| > R_n - 1$$

isto é, $\{x : |f(x) - R_n| < 1\} \subset \{x : |f(x)| > R_n - 1\}$
Logo $\mu(\{x : |f(x)| > R_n - 1\}) > 0$
donde segue que

$$\mu(\{x : |f(x)| > R\}) > 0, \ \forall R > 0$$

$\Rightarrow f \notin L^\infty$ $\rightarrow\leftarrow$

Logo R_f é limitado. Segue que R_f é compacto.
Seja $M = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

Provemos que $M \leq \|f\|_\infty$
Note que
$$\mu(\{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$$
Tome $w_0 \in \mathbb{C}$, suponha que $|w_0| > \|f\|_\infty$. Então $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tq $|w_0| - \varepsilon_0 > \|f\|_\infty$. Logo, se $|f(x) - w_0| < \varepsilon_0$, temos que
$$f(x) - w_0 > -\varepsilon_0 \Rightarrow |f(x)| - |w_0| > f(x) - w_0 > -\varepsilon_0$$
$$\Rightarrow |f(x)| > |w_0| - \varepsilon_0 > \|f\|_\infty$$
Logo $\{x \in X \mid |f(x) - w_0| < \varepsilon_0\}) \subset \{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_\infty\}$
Porém se $w_0 \in R_f$
$$0 < \mu(\{x \in X \mid |f(x) - w_0| < \varepsilon_0\}) \leq \mu(\{x \in X ; |f(x)| > \|f\|_\infty\} = 0$$
$\rightarrow\leftarrow$

Logo $w_0 \notin R_f$. Logo, $w \in R_f \Rightarrow |w| \leq \|f\|_\infty$
$$\Rightarrow M \leq \|f\|_\infty$$

Queremos agora provar que $\|f\|_\infty \leq M$.
Note que se
$$\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{B_M(0)})) = 0$$
isto é,
$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$$

então $M \geq \|f\|_\infty = \inf \{ c > 0 ; |f(x)| \leq c \text{ q.t.p.} \}$

De fato, ponha $S = \mathbb{C} \setminus \overline{B_M(0)}$.
Então $\forall m \in \mathbb{N}$

$$S_{m,n} \doteq S_{M+\frac{1}{m}, M+n} = \{ \lambda \in \mathbb{C} ; M + \tfrac{1}{m} \leq |\lambda| \leq M+n \}$$

Com $\mu(f^{-1}(S_{m,n})) = 0$
De fato, primeiro note que, $\forall \lambda \in S_{m,n}$, $\exists \varepsilon_\lambda > 0$ tal que

$$\mu(\{x \in X \; |f(x) - \lambda| < \varepsilon_\lambda\}) = 0$$
$$\iff \mu(f^{-1}(B(\lambda, \varepsilon_\lambda))) = 0$$

(De fato, $x \in f^{-1}(B(\lambda, \varepsilon_\lambda)) \iff f(x) \in B(\lambda, \varepsilon_\lambda)$
$\iff |f(x) - \lambda| < \varepsilon_\lambda$)

(E note que $\lambda \in S_{m,n} \Rightarrow |\lambda| > M \Rightarrow \lambda \notin R_f$)

Logo, como $S_{m,n}$ é compacto, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tais que

$$S_{m,n} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\lambda_i, \varepsilon_{\lambda_i})$$

logo $$f^{-1}(S_{m,n}) \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(B(\lambda_i, \varepsilon_{\lambda_i}))$$

$$\therefore \mu(f^{-1}(S_{m,n})) = 0$$

Agora, note que, pondo

$$S_m \doteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{m,n}$$

temos $\mu(f^{-1}(S_m)) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(S_{m,n})\right) = 0$

e finalmente, temos $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} S_m$, logo

$$\mu(f^{-1}(S)) = \mu\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} f^{-1}(S_m)\right) = 0$$

$\therefore \|f\|_\infty \leq M$

$\therefore \|f\|_\infty = M$ $\square$

Ex 13) L^∞ não é separável

Para cada $r \in (0,\infty)$, ponha $f_r \doteq \chi_{B_r(0)}$.

Note que
$$\|f_r - f_s\| = 1, \quad \forall r, s \in (0,\infty),\ r \neq s.$$

Se $D \subseteq L^\infty$ é denso, então
$$B_{1/2}(f_r) \cap D \neq \emptyset \quad , \forall r \in (0,\infty)$$

Logo podemos definir injeção $(0,\infty) \to D$.

Em particular D é não enumerável

(4) Se $1 \leq p < r \leq \infty$, $L^p + L^r$ é espaço de Banach com a norma

$$\|f\| = \inf \{\|g\|_p + \|h\|_r ; f = g + h\}$$

e se $p < q < r$, a inclusão $L^q \hookrightarrow L^p + L^r$ é contínua.

RESP)

De fato, note que $\|\cdot\|$ é norma, pois $\|f\| \geq 0$

Se $a = 0$, então

$$\|af\| = \|0\| = 0 = |a| \|f\|$$

Caso contrário,

$$\|af\| \leq \|ag\|_p + \|ah\|_r$$
$$= |a| (\|g\|_p + \|h\|_r) \quad \forall g \in L^p, h \in L^r$$
$$\text{t.q. } f + g = h$$

logo $\|af\| / |a| \leq \|f\| \Rightarrow \|af\| \leq |a| \|f\|$

e

$$\Rightarrow |a| \|f\| = \|a^{-1} a f\| / |a^{-1}| \leq \|af\| \Rightarrow \|af\| = |a| \|f\|$$

Agora, sejam $f_1, f_2 \in L^p + L^r$ e $\varepsilon > 0$.

Então $\exists g_1, g_2 \in L^p$, $h_1, h_2 \in L^r$ tais que

$$f_1 = g_1 + h_1 \qquad \|f_1\| + \varepsilon \geq \|g_1\|_p + \|h_1\|_r$$
$$\text{e}$$
$$f_2 = g_2 + h_2 \qquad \|f_2\| + \varepsilon \geq \|g_2\|_p + \|h_2\|_r$$

logo

Como $f_1+f_2 = g_1+h_1+g_2+h_2$
$= (g_1+g_2)+(h_1+h_2)$

e $g_1+g_2 \in \mathcal{L}^p$, $h_1+h_2 \in \mathcal{L}^r$, temos

$$\|f_1+f_2\| \leq \|g_1+g_2\|_p + \|h_1+h_2\|_r$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|g_1\|_p + \|g_2\|_p + \|h_1\|_r + \|h_2\|_r \\
&= (\|g_1\|_p + \|h_1\|_r) + (\|g_2\|_p + \|h_2\|_r) \\
&\leq \|f_1\| + \varepsilon + \|f_2\| + \varepsilon \\
&= \|f_1\| + \|f_2\| + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ foi qualquer, segue $\|f_1+f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$

Finalmente, seja $f \in \mathcal{L}^p + \mathcal{L}^r$ e $\|f\| = 0$.

Dado $\varepsilon \in (0,1)$, $\exists\, g \in \mathcal{L}^p$ e $h \in \mathcal{L}^r$ tal que $f = g+h$ e

$$\|g\|_p + \|h\|_r < \varepsilon^{(p+1)/p}$$

Segue que $\mu(G) < \varepsilon$, onde

$$G \doteq \{x \in X \mid \varepsilon \leq g(x)\}$$

pois

$$\mu(G)\,\varepsilon^p = \int_G \varepsilon^p \leq \int_G |g|^p \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } \|g\|_p < \varepsilon^{(p+1)/p}}}{<} \varepsilon^{(p+1)p/p} = \varepsilon^{p+1}$$

Analogamente, $\mu(H) < \varepsilon$
onde

$$H = \{x \in X \mid \varepsilon \leq |h(x)|\}$$

pois $p < r$, $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \varepsilon^{(p+1)/p} < \varepsilon^{\frac{r+1}{r}} \Rightarrow \|h\|_r < \varepsilon^{\frac{r+1}{r}}$

Defina
$$F=\{x\in X \mid 2\varepsilon \leq |f(x)|\}$$
De modo que $F\subseteq G\cup H$. Então
$$\mu(F)\leq \mu(G\cup H)<2\varepsilon$$
Segue que
$$\{x\in X \mid 0<|f(x)|\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{x\in X \mid 2\tfrac{1}{k}\leq |f(x)|\}$$
tem medida nula, logo $f=0$ q.t.p.
Logo $\|\cdot\|$ é norma.

Falta ver que é completo.
Antes disso, vejamos que $L^q\subset L^p+L^r$
Seja $q\in(p,r)$, $f\in L^q$.
Então seja
$$E=\{x\in X \mid |f(x)|<1\}$$
Então
$$f=f\chi_E+f\chi_{E^c}$$
Além disso, como $p>q$
$$|f\chi_E|^p\leq |f\chi_E|^q\leq |f|^q$$
$\Rightarrow f\chi_E\in L^p$
Analogamente, como $r>q$
$$|f\chi_{E^c}|^r\leq |f\chi_{E^c}|^q\leq |f|^q$$
$\Rightarrow f\chi_{E^c}\in L^r$
Logo $f\in L^p+L^r$

Ainda: se $\|f\|_q = 1$

$$\Rightarrow \|f\| = \| f\chi_E + f\chi_{E^c}\| \leq \|f\chi_E\|_p + \|f\chi_E\|_r$$

$$\leq \left(\int |f|^q\right)^{1/p} + \left(\int |f|^q\right)^{1/r}$$

$$= 1^{1/p} + 1^{1/r} = 2$$

Logo $\left\|\frac{f}{\|f\|_q}\right\| \leq 2 \Rightarrow \|f\| \leq 2\|f\|_q$
se $f \in L^q$
e $q \neq 0$

e a inclusão é contínua.

Provemos que $(L^p + L^r, \|\cdot\|)$ é completo.
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ série absolutamente convergente em $L^p + L^r$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, g_n \in L^p$ e $h_n \in L^r$ tais que

$$f_n = g_n + h_n$$

e

$$\|g_n\|_p + \|h_n\|_r < \|f_n\| + 2^{-n}$$

Segue que
$$\sum_{n=1}^{N} \|g_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\| + 2^{-n}, \quad \forall N$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| + 1 < +\infty$$

donde $\sum g_n$ é absolutamente convergente em L^p.

Analogamente, temos que $\sum h_n$ é absolutamente convergente em L^r. Como L^p e L^r são de Banach, $\exists\, g \in L^p$ e $h \in L^r$ tais que

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g}_{\text{em } L^p} \quad \text{e} \quad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} h_n = h}_{\text{em } L^r}$$

Note que essa convergência também vale em $(L^p + L^r, \|\cdot\|)$. De fato, $L^p \subset L^p + L^r$, $L^r \subset L^p \cap L^r$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} g_n - g\right\| \leq \underbrace{\left\|\sum_{n=1}^{N} g_n - g\right\|_p}_{\longrightarrow 0} + \|0\|_r$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} h_n - h\right\| \leq \|0\|_p + \underbrace{\left\|\sum_{n=1}^{N} h_n - h\right\|_r}_{\longrightarrow 0}$$

Logo, como $\sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=1}^{N} g_n + h_n$, $\forall N$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n + \sum_{n=1}^{\infty} h_n = g + h \in L^p + L^r$$

De fato,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n - (g+h)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} g_n + h_n - (g+h)\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{n=1}^{N} g_n - g\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{N} h_n - h\right\| \longrightarrow 0$$

⑤ Suponha $0 < p < q < \infty$. Então $L^p \not\subset L^q$ se e só se X contém conjuntos de medida positiva arbitrariamente pequenos, e $L^q \not\subset L^p$ se e só se X contém conjuntos de medida arbitrariamente grande.

RESP)

Suponha que X contém conjuntos arbitrariamente pequenos, isto é, $\exists \{E_n\} \subset X$, E_n disjuntos,

$$0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$$

Considere

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}, \quad a_n = \mu(E_n)^{-1/q}$$

Note que

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \int \left| \sum \mu(E_n)^{-1/q} \chi_{E_n} \right|^p d\mu$$

$$= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-1/q} \chi_{E_n} \right)^p d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{m} \mu(E_n)^{-1/q} \chi_{E_n} \right)^p d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int \sum_{n=1}^{m} \mu(E_n)^{-p/q} \chi_{E_n} d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\mu(E_n))^{1-p/q} \quad (1)$$

pois os E_n são disjuntos, logo $\chi_{E_n}^j \chi_{E_m}^i = 0$

Mas daí por hipótese $1 - \frac{p}{q} > 0$

$$0 < (1) < \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n})^{1-\frac{p}{q}} < \infty$$

Logo $f \in L^p$.

Porém

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q = \int \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-1/q} \chi_{E_n} \right|^q$$

$$= \int \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-1} \chi_{E_n} d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (1) = \infty$$

Logo $\|f\|_q = \infty \therefore f \notin L^q$

Suponha agora que $L^p \not\subset L^q$. Então $\exists f \in L^p \setminus L^q$.
Considere
$$E_n = \{ x \in X \mid |f(x)| > n \}, \quad n \in \mathbb{N}$$
temos
$$\infty > \|f\|_p^p \geq \int_{E_n} |f|^p > n^p \mu(E_n)$$

Logo $\mu(E_n) < \|f\|_p^p / n^p$

Logo, $\mu(E_n) \to 0$ p/ $n \to \infty$ e como $f \in L^p$, $\|f\|_p^p < \infty$. Agora basta mostrar que $\mu(E_n) > 0, \forall n$.
Suponha, por absurdo, que $\exists n, \mu(E_n) = 0$
Seja $F_n = E_n^c$. Então
$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \int |f|^p \chi_{F_n} d\mu < \infty$$

Mas daí

$$\|f\|_q^q = \int |f|^p |f|^{q-p} d\mu = \int |f|^p |f|^{q-p} \chi_{F_n} d\mu$$
$$\leq n^{q-p} \int |f|^p \chi_{F_n} = n^{q-p} \|f\|_p^p < \infty$$

Contradizendo $f \notin L^q$.

$L^q \not\subset L^p$

Suponha agora que X tem medida finita.
Então, pela PROP 6.12, $L^q \subset L^p \rightarrow\leftarrow$

$\hookrightarrow$ De fato, $\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leq \| |f|^p \|_{q/p} \|1\|_{q/(q-p)}$

$$= \|f\|_q^p \, \mu(X)^{(q-p)/q}$$

Assim, se X tem conjuntos de medida arbitrariamente grande, existe $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjuntos tais que $1 \leq \mu(E_n) < \infty$, $\forall n$.
De fato, tome F_1, $\infty > \mu(F_1) \geq 1$ e suponha que definimos F_n. Tome F_{n+1} t.q
Daí, tomando $\mu(F_{n+1}) \geq \max\{2^{n+1}, 2\sum_{i=1}^{n} F_i\}$

$$E_n = F_n \setminus \bigcup_{n=1}^{n-1} E_i \qquad \mu(E_n) \leq \mu(F_n)$$

temos $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ disjuntos e $\qquad -\mu(E_n) > -\mu(F_n)$

$$\mu(E_n) = \mu(F_n) - \sum \mu(E_i)$$

$$\geq \mu(F_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(F_i)$$

$$\geq \mu(F_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(F_i)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n-1} \mu(F_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^n$$

Considere
$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}, \quad a_n = \mu(E_n)^{-\frac{1}{p}}$$

Daí
$$\int |f|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-q/p} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{1-q/p}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu(E_n))^{q/p-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n})^{q/p-1} < \infty$$

Já
$$\int |f|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-1} \mu(E_n) = \sum (1) = \infty$$

Logo, segue. (*)

Caso $q = \infty$

Então $L^p \not\subset L^\infty \iff X$ contém conjuntos arbitrariamente pequenos e $L^\infty \not\subset L^p$ se e somente se X tem conjuntos de medida arb. grande

Para a primeira parte, use o mesmo argumento de antes,

isto é,

Seja $f \in L^p \setminus L^\infty$. Se $E_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$

Então $\mu(E_n) < \|f\|_p^p / n^p \quad \therefore \mu(E_n) \to 0$

Se $\mu(E_n) = 0$, p/ algum n, então, por definição

$$\operatorname{ess\,sup}(f) \leq n$$

$$\Downarrow$$

$$\|f\|_\infty \leq n \quad \rightarrow\leftarrow$$

Agora, para a recíproca, seja $\{E_n\}$ disjunta, $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$, $\forall n$.

Tome

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}, \quad a_n = \mu(E_n)^{-1/(p+1)}$$

Então

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{-p/(p+1)} \mu(E_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{\frac{-p+p+1}{p+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)^{\frac{1}{p+1}}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n})^{\frac{1}{p+1}} < \infty$$

Porém, note que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) > 0$ e

$\forall x \in E_n$, $|f(x)| = \mu(E_n)^{-\frac{1}{p+1}}$

$$= \frac{1}{(\mu(E_n))^{\frac{1}{p+1}}}$$

$\mu(E_n) \leq 2^{-n}$

$$\geq \frac{1}{(2^{-n})^{1/(p+1)}} = 2^{\frac{n}{p+1}}$$

Logo, se $\|f\|_\infty = M < \infty \Rightarrow \exists E, \mu(E) = 0,$
$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in E^c$

Logo, se n suf. grande, temos
$\forall x \in E_n, |f(x)| > M \Rightarrow E_n \subset E \Rightarrow \mu(E) > 0 \rightarrow\leftarrow$

Logo $f \notin L^\infty$.

Ainda. Temos que $L^\infty \not\subset L^p$ se X tem $\rightarrow$ conj. arb. grandes

De fato, se X tem conj. arb. grandes, tome a mesma f do caso $q < \infty$, isto é,

$$\mu(E_n) \geq 2^n$$

$$f = \sum a_n \chi_{E_n}, \quad a_n = \mu(E_n)^{-1/p}$$

Então $\quad \mu(E_n) \geq 2^n \Rightarrow \mu(E_n)^{-1/p} \leq 2^{-n/p} \leq 2$

$\forall n$, logo
$$\|f\|_\infty \leq 2 \therefore f \in L^\infty$$

Mas como vimos, $f \notin L^p$.

(*) Faltam provar $L^q \not\subset L^p \Rightarrow X$ tem conj. arb. grandes. Se $\mu(X) < \infty \Rightarrow L^q \subset L^p \rightarrow\leftarrow$. Logo, $\mu(X) = \infty$

Seja $f \in L^q \setminus L^p \quad 0 < p < q < \infty$

Considere
$$E_n = \{x \in X \mid |f(x)| < n\}$$
Então
$$\infty > \|f\|_q^q \geq \int_{E_n^c} |f|^q > n^q \mu(E_n^c)$$
Logo $\mu(E_n^c) < \|f\|_q^q / n^q \therefore \mu(E_n^c) \longrightarrow 0$

Daí,
$$\mu(E_n) \longrightarrow +\infty$$
Vejamos que $\mu(E_n) \neq +\infty$

De fato, suponha $\mu(E_n) = +\infty$

Isso implica
$$\mu(\underbrace{\{x \in X \mid |f(x)| < n\}}_{=E_n}) = +\infty$$

$\boxed{\text{Ex 6}}$

Suponha $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Ache exemplos de funções f em $(0,\infty)$ com a medida de Lebesgue, tais que $f \in L^p$ se e só se

a) $p_0 < p < p_1$

b) $p_0 \leq p \leq p_1$

c) $p = p_0$

a) Se $p_1 < \infty$, defina $f(x) = x^{-1/p_1} \chi_{(0,1/2)}(x) + x^{-1/p_0} \chi_{(2,\infty)}(x)$

Caso contrário, troque x^{-1/p_1} por $|\log(x)|$

b) Se $p_1 < \infty$, pense $f(x) = x^{-1/p_1} |\log(x)|^{-2/p_1} \chi_{(0,1/2)} + x^{-1/p_0} |\log(x)|^{-2/p_0} \chi_{(2,\infty)}$

C.C. omita o primeiro termo.

c) Pense $p_1 = p_0$ em (b)

Ex 7) Se $f \in L^p \cap L^\infty$, p/ algum $p < \infty$ então $f \in L^q$, $\forall q > p$ e

$$\|f\|_\infty = \lim_{q \to \infty} \|f\|_q$$

RESP)

De fato, seja $q > p$.

Então

$$\int |f|^q = \int |f|^{q-p} |f|^p \leq \|f\|_\infty^{q-p} \int |f|^p$$

$$= \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p$$

Logo $f \in L^q$.

Note que, a conta acima implica em

$$\|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{\frac{q-p}{q}} \|f\|_p^{p/q}$$

Logo $\limsup_{q \to \infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$

Além disso, seja $\varepsilon > 0$.

Note que $\|f\|_\infty = \inf \left\{ M \geq 0 \mid \exists E \subset X,\ \mu(E)=0 \text{ e } |f(x)| \leq M,\ \forall x \in E^c \right\}$

Logo

$$|f(x)| \nleq \|f\|_\infty - \varepsilon \text{ q.t.p}$$

isto é, $\exists E,\ E \subset X,\ \mu(E) > 0$ e $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$ em E

De fato, por daí $\forall F \subset X$, tq $|f(x)| \leq \|f\|_\infty - \varepsilon,\ \forall x \in F^c$

$\Rightarrow E \subset F$ i.e: $|f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon$ $\forall x \in F$

$\Rightarrow \mu(F) > 0$

Assim

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q \geq \int_E |f|^q \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^q \mu(E)$$

Logo

$$\|f\|_q \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(E)^{1/q}$$

$$\Rightarrow \liminf_{q \to \infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ foi qualquer, segue

$\liminf_{q \to \infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty$ que completa o Ex.

Ex 9 Suponha $1 \leq p < \infty$. Se $\|f_n - f\|_p \to 0$ então $f_n \to f$ em medida e logo uma subsequência converge para f q.t.p. Por outro lado, se $f_n \to f$ em medida e $|f_n| \leq g \in L^p$, $\forall n$, então $\|f_n - f\|_p \to 0$

RESP)

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tq $\|f_n - f\|_p < \varepsilon^{(p+1)/p}$, $\forall n \geq N$

Daí, se $n \geq N$, se $E = \{x \in X \mid \varepsilon^p \leq |f_n(x) - f(x)|^p\}$

$= \{x \in X \mid \varepsilon \leq |f_n(x) - f(x)|\}$

então

$$\mu(E)\varepsilon^p = \int_E \varepsilon^p \leq \int_E |f_n - f|^p \leq \int |f_n - f|^p$$

$$< \varepsilon^{\frac{(p+1)p}{p}}$$

$$= \varepsilon^{p+1}$$

Logo $\mu(E) < \varepsilon$ $\therefore$ $f_n \to f$ em medida.

Se $E = \{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ então se $\|f_n - f\|_p < \varepsilon^\alpha$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p \geq \int_E |f_n - f|^p \geq \int_E \varepsilon^p = \mu(E)\varepsilon^p$$

$\varepsilon^{\alpha p}$

$$\Rightarrow \mu(E) \leq \varepsilon^{\alpha p - p}$$

Logo, tomando α t.q. $\alpha p - p = 1 \iff \alpha p = 1 + p$
$\iff \alpha = \frac{1+p}{p}$

temos $\mu(E) < \varepsilon$.

Reciprocamente, suponha que $f_n \to f$ em medida.
Então se $(f_{n_k})_k$ é subsequência de f_n, então ela converge p/ f em medida, logo, possui subsubseq. $(f_{n_{k_j}})_j$ que converge para f q.t.p.
Segue que $|f_{n_{k_j}}|^p \longrightarrow |f|^p$ q.t.p.
Mas $|f_{n_{k_j}}|^p \leq g^p \in L^1, \forall j$, logo, pelo teorema da convergência dominada, $|f|^p \in L^1 \Rightarrow f \in L^p$
Além disso,

$$|f_{n_{k_j}} - f|^p \longrightarrow 0 \text{ q.t.p.}$$

e como

$$|f_{n_{k_j}} - f|^p \leq 2^p (g^p + |f|^p) \in L^1, \forall j$$

pelo teorema da convergência dominada,

$$\lim_{j \to \infty} \int |f_{n_{k_j}} - f|^p = \int 0 = 0$$

$$\lim_{j\to\infty} \|f_{n_{k_j}} - f\|_p^p$$

logo, $\|f_{n_{k_j}} - f\|_p \to 0$ $\therefore$ toda subsequência de $(\|f_n - f\|_p)_n$ tem subsubsequência que converge para 0, logo, $\|f_n - f\|_p \to 0$ e $f_n \to f$ em L^p $\square$

10) Suponha $1 \leq p < \infty$. Se $f_n, f \in L^p$ e $f_n \to f$ q.t.p. então $\|f_n - f\|_p \to 0 \iff \|f_n\|_p \to \|f\|_p$

Dem:

De fato, suponha $\|f_n - f\|_p \to 0$

Então, como

$$\|f_n\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f\|_p$$

temos

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_p \leq \|f\|_p$$

e como $\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p$

temos

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$$

logo segue.

Reciprocamente, se $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, note que

$$|f_n - f|^p \leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) \in L^1, \forall n$$

$$2^p(|f_n|^p + |f|^p) \longrightarrow 2^{p+1}(|f|^p) \text{ q.t.p.}$$

$$\int 2^p(|f_n|^p + |f|^p = 2^p(\|f_n\|_p^p + \|f\|_p^p)$$

$$\longrightarrow 2^p(\|f\|_p^p + \|f\|_p^p)$$

$$= 2^{p+1}(\|f\|_p^p)$$

$$= \int 2^{p+1}(|f|_p^p)$$

Pelo T.C.D. generalizado $\lim \int |f_n - f|^p =$

$\int \lim |f_n - f|^p = 0$ $\square$

Ex13 $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ é separável, para $1 \leq p < \infty$.
Porém $L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ não é separável.

RESP)
Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n, m)$ e $\varepsilon > 0$. Então pela PROP 6.7 existe função simples $g = \sum_{j=1}^{r} a_j \chi_{E_j}$ tal que $m\left(\bigcup_{j=1}^{r} E_j\right) < \infty$ e $\|f - g\|_p < \varepsilon/4$
Fixe $j \in \{1, \dots, r\}$ e assuma S.P.G. que $m(E_j) > 0$.
Então $\exists\, b_j \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\|a_j \chi_{E_j} - b_j \chi_{E_j}\|_p = |a_j - b_j|\, m(E_j)^{1/p} < \varepsilon/4r$$

Mais ainda, existe coleção finita de retângulos cujos lados são intervalos tais que

$$\|b_j \chi_{E_j} - b_j \chi_{F_j}\|_p = |b_j|\, m(E_j \Delta F_j)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4r}$$

Onde F_j é a união de tais retângulos.
Podemos diminuir os F_j's tal que sejam união de intervalos com extremos racionais, cuja união G_j satisfaz

$$\|b_j \chi_{F_j} - b_j \chi_{G_j}\|_p < \varepsilon/4r$$

Segue que

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{r} b_j \chi_{G_j} \right\|_p \leq \|f-g\|_p + \sum_{j=1}^{r} \|a_i \chi_{E_i} - b_i \chi_{E_i}\|_p +$$
$$+ \sum_{j=1}^{r} \|b_i \chi_{E_i} - b_i \chi_{F_i}\|_p + \sum_{j=1}^{r} \|b_i \chi_{F_i} - b_i \chi_{G_i}\|_p$$
$$< \varepsilon$$

Logo, a coleção de combinações racionais de funções características de uniões finitas de retângulos cujos lados são intervalos com extremos racionais (que é enumerável) é denso em $L^p(\mathbb{R}^n, m)$

Para L^∞, note que, $\forall r \in (0, \infty)$, pondo
$$f_r = \chi_{B(0,r)}$$
temos
$$\|f_r - f_s\|_\infty = 1, \ \forall r, s, \ r \neq s$$

Se $D \subseteq L^\infty$, então $B(f_r, 1/2) \cap D \neq \emptyset$, $\forall r > 0$
Logo, pondo $\phi : (0, \infty) \longrightarrow D$
$$r \longmapsto f \text{ onde } f \in B(f_r, 1/2)$$
temos

que ϕ é injetiva pois

$$f = \phi(r) = \phi(s) \Rightarrow f \in B(f_r, 1/2) \cap B(f_s, 1/2)$$

Mas daí

$$\|f_r - f_s\|_\infty \leq \|f_r - f\|_\infty + \|f - f_s\|_\infty < 1/2 + 1/2 < 1$$

$\rightarrow\leftarrow$. Logo, $\nexists f$, $\phi(r) = \phi(s)$

Segue que D é não enumerável e L^∞ não é separável.

Ex 14) Se $g \in L^\infty$, então o operador T definido por $Tf = fg$ é limitado em L^p p/ $1 \leq p \leq \infty$, com $\|T\| \leq \|g\|_\infty$ e igualdade se μ é semifinita.

RESP)

De fato, defina
$$\begin{aligned} T : L^p &\longrightarrow L^p \\ f &\longmapsto fg \end{aligned}$$

Então

$$\|Tf\|_p = \|fg\|_p \leq \|g\|_\infty \|f\|_p, \forall f \in L^p$$

Logo $\|T\| \leq \|g\|_\infty$

Agora suponha μ não semi finita. Então $\exists A \subset X$, $\mu(A) = \infty$ t.q. $\forall B \subset A$ e $\mu(B) > 0$ então $\mu(B) = \infty$.

Defina $g = \chi_A$. Então $\|g\|_\infty = 1$, e, $\forall f \in L^p$,

$$\left|\int_A f\right|^p = |Tf|^p \leq 1 \cdot \|f\|_p^p < \infty$$

Afirmo que $\mu(\{x \in A \mid |f(x)| > 0\}) = 0$

Caso contrário, como

$$\{x \in A : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : |f(x)| > 1/n\}$$

então $\exists n$ t.q. $\mu(\{x \in A : |f(x)| > 1/n\}) > 0$

Logo

$$\infty = \mu(\underbrace{\{x \in A : |f(x)| > 1/n\}}_{A_n})$$

Mas

$$\infty > \|f\|_p^p = \int |f|^p \geq \int_{A_n} |f|^p \geq \int_{A_n} 1/n = 1/n\, \mu(A_n) = \infty$$

$\rightarrow\leftarrow$

Logo, $Tf = 0$, $\forall f \in L^p \therefore 0 = \|T\| < 1 = \|g\|_\infty$

Assim $\|T\| = \|g\|_\infty$, $\forall g \Rightarrow \mu$ é semi-finita.