Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada
Lista 10: Produto tensorial

Exercício 1. Sejam $V_1, \dots, V_p$ $\mathbb{K}$-e.v. com bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ respectivamente. Denote por $i : \mathscr{B}_1 \times \cdots \times \mathscr{B}_p \to V_1 \times \cdots \times V_p$ à inclusão. Mostre que o par $(i, V_1 \times \cdots \times V_p)$ é universal sobre $\mathscr{B}_1 \times \cdots \times \mathscr{B}_p$ com respeito a P_1 ="o contradomínio é um $\mathbb{K}$-e.v." e P_2 ="é p-linear". Qual propriedade das aplicações p-lineares provamos com isso?

Exercício 2. Encontre um isomorfismo de $V \otimes W$ em $W \otimes V$.

Exercício 3. Dados X e Y conjuntos não vazios. Denote por $\mathscr{F}_0(X, \mathbb{K})$ o subespaço de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ cujos elementos são as funções de suporte finito. Prove que $\mathscr{F}_0(X \times Y, \mathbb{K})$ é isomorfo a $\mathscr{F}_0(X, \mathbb{K}) \otimes \mathscr{F}_0(Y, \mathbb{K})$.

Exercício 4. Sejam V e W $\mathbb{K}$-espaços vetoriais.

a. Mostre que existe única transformação linear $\Gamma : V \otimes W \to L(V^*, W)$ satisfazendo $\Gamma(v \otimes w)(f) = f(v)w$, para quaisquer $v \in V, w \in W, f \in V^*$.

b. Mostre que se as dimensões de V e W forem finitas então Γ é um isomorfismo.

Exercício 5. Sejam V_i, V_i' e V_i'' $\mathbb{K}$-e.v. para $i = 1, \dots, p$. Suponha que $T_i, T_i' \in \mathscr{L}(V_i, V_i')$ e $S_i \in \mathscr{L}(V_i'', V_i)$. Mostre que:

a. Se cada T_i é sobrejetora então $T_1 \otimes \cdots \otimes T_p$ é sobrejetora.

b. Se cada T_i é injetora então $T_1 \otimes \cdots \otimes T_p$ é injetora.

c. Se cada T_i é um isomorfismo então $T_1 \otimes \cdots \otimes T_p$ é um isomorfismo.

d. $(T_1 \otimes \cdots \otimes T_p) \circ (S_1 \otimes \cdots \otimes S_p) = (T_1 \circ S_1) \otimes \cdots \otimes (T_p \circ S_p)$.

e. Se cada T_i é um isomorfismo então $(T_1 \otimes \cdots \otimes T_p)^{-1} = T_1^{-1} \otimes \cdots \otimes T_p^{-1}$.

f. $T_1 \otimes \cdots \otimes (T_i + T_i') \otimes \cdots \otimes T_p = (T_1 \otimes \cdots \otimes T_i \otimes \cdots \otimes T_p) + (T_1 \otimes \cdots \otimes T_i' \otimes \cdots \otimes T_p)$.

g. $T_1 \otimes \cdots \otimes \alpha T_i \otimes \cdots \otimes T_p = \alpha(T_1 \otimes \cdots \otimes T_i \otimes \cdots \otimes T_p)$.

h. $\mathrm{Id}_{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{V_p} = \mathrm{Id}_{(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p)}$.

Exercício 6. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de dimensão n finita e $T : V \to V$ um operador linear. Prove que:

a. $\mathrm{tr}(T \otimes T) = (\mathrm{tr}(T))^2$

b. $\det(T \otimes T) = (\det(T))^{2n}$.

Exercício 7. Suponha que V_1 e V_2 sejam $\mathbb{K}$-e.v. tais que $\dim(V_1) = m$ e $\dim(V_2) = n$ e que $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$ sejam bases para V_1 e V_2, respectivamente. Considere $V = M_{m \times n}(\mathbb{K})$ e

$$\begin{aligned} \phi : V_1 \times V_2 &\to V \\ (v_1, v_2) &\mapsto [v_1]_{\mathscr{B}_1} [v_2]_{\mathscr{B}_2}^T \end{aligned}$$

Mostre que (ϕ, V) é produto tensorial para V_1, V_2.

Exercício 8. Suponha que V_1 e V_2 sejam subespaços de V e que W_1 e W_2 sejam subespaços de W. Mostre que

$$(V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2) = (V_1 \cap V_2) \otimes (W_1 \cap W_2).$$

Exercício 9. Mostre que existe única transformação linear $T : V_1^* \otimes \cdots \otimes V_p^* \to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_p)^*$, satisfazendo

$$T(f_1 \otimes \cdots \otimes f_p)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = \Pi_{j=1}^{p} f_j(v_j),$$

para quaisquer $f_j \in V_j^*, v_j \in V_j$. Mostre também que T é injetora e, se $\dim(V_j) < \infty$ para todo j então T é bijetora.

Exercício 10. Sejam V e W dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita n e m respectivamente e $T : V \to V$ um operador linear.

a. Mostre que existe único $S : V \otimes W \to V \otimes W$ operador linear que satisfaz: para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$, $S(v \otimes w) = T(v) \otimes w$.

b. Mostre que se $g(x) \in \mathbb{K}[x]$ então $g(S) = g(T) \otimes \mathrm{Id}$.

c. Se $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ então$f(T) = 0$ se e somente se $f(S) = 0$. Conclua que T é diagonalizável se e somente se S é diagonalizável.

Exercício 11. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial tal que $\dim(V) = 3$ e $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Escreva a matriz de $\Lambda^2(T) : \Lambda^2(V) \to \Lambda^2(V)$ com respeito à base $\mathscr{B}^2_< = \{e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2\}$ de $\Lambda^2(V)$ em função da matriz $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$.

Exercício 12. Mostre que uma família de vetores $v_1, \ldots, v_p$ em V é LI se, e somente se, $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$ em $\Lambda^p(V)$.

Exercício 13. Sejam V, W e Z $\mathbb{K}$-e.v. Suponha que $T_1 \in \mathscr{L}(V, W)$ e $T_2 \in \mathscr{L}(W, Z)$. Mostre que:

a. Se T_1 é sobrejetora então $\Lambda^p(T_1)$ é sobrejetora.

b. Se T_1 é injetora então $\Lambda^p(T_1)$ é injetora.

c. Se T_1 é um isomorfismo então $\Lambda^p(T_1)$ é um isomorfismo.

d. $\Lambda^p(T_2 \circ T_1) = \Lambda^p(T_2) \circ \Lambda^p(T_1)$.

Exercício 14. Sejam V, W e Z $\mathbb{K}$-e.v. Suponha que $T_1 \in \mathscr{L}(V, W)$ e $T_2 \in \mathscr{L}(W, Z)$. Mostre que:

a. Se T_1 é sobrejetora então $S^p(T_1)$ é sobrejetora.

b. Se T_1 é injetora então $S^p(T_1)$ é injetora.

c. Se T_1 é um isomorfismo então $S^p(T_1)$ é um isomorfismo.

d. $S^p(T_2 \circ T_1) = S^p(T_2) \circ S^p(T_1)$.

Exercício 15. Mostre que existe única $\Gamma \in \mathscr{L}(V^{\otimes p}, \Lambda^p(V))$ (aqui $V^{\otimes p} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{-vezes}}$) satisfazendo

$$\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

para todo $v_j \in V, 1 \leq j \leq p$.

Exercício 16. Mostre que existe única $\Gamma \in \mathscr{L}(V^{\otimes p}, S^p(V))$ satisfazendo

$$\Gamma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \odot \cdots \odot v_p$$

para todo $v_j \in V, 1 \leq j \leq p$.

Exercício 17. Seja N o subespaço de $V^{\otimes p}$ gerado por todos os tensores elementares $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ tais que existam $1 \leq i < j \leq p$ com $v_i = v_j$ e considere $U = V^{\otimes p}/N$ e $\pi : V^{\otimes p} \to U$ a projeção canônica. Mostre que $(U, \pi \circ \phi)$ é uma p-ésima potência exterior para V onde $\phi : V^p \to V^{\otimes p}$, é a aplicação p-linear canônica $(v_1, \ldots, v_p) \mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$.

Exercício 18. Mostre que:

a. $\mathrm{Alt}_p(V; W) \simeq \mathscr{L}(\Lambda^p(V), W)$

b. $\mathrm{Sym}_p(V; W) \simeq \mathscr{L}(S^p(V), W)$

Ex 1) Como $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_p$ é base de $V_1 \times \dots \times V_p$

De fato, dada $f : \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_p \to \mathbb{K}$, existe única $\tilde{f} : V_1 \times \dots \times V_p \to \mathbb{K}$ p-linear tal que $\tilde{f}|_{\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_p} \to \mathbb{K} = \tilde{f} \circ i = f$.

De fato, dado $v \in V_1 \times \dots \times V_p$, $v = (v_1, \dots, v_p)$

Então $\exists\, \alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$ tais que $v_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} u_{j_i}$

$u_{j_i} \in \mathcal{B}_i$, $i = 1, \dots, p$.

Assim

$$v = \left(\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{1j} u_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^{n_p} \alpha_{pj} u_{jp} \right)$$

Defina

$$\tilde{f}(v) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_p=1}^{n_p} \alpha_{1j_1} \cdots \alpha_{pj_p} f(u_{1j_1}, \dots, u_{pj_p})$$

Então note que $\tilde{f}|_{\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_p} = f$, $\tilde{f}$ é p-linear e ainda $\tilde{f}$ é única, pois se $\exists\, \tilde{f}'$, então $\tilde{f} = \tilde{f}'$ na base $\mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_p$ e ambas são lineares $\Rightarrow \tilde{f} = \tilde{f}'$

Ex2) Considere o mapa

$$\begin{aligned} \psi : V \times W &\longrightarrow W \otimes V \\ (v, w) &\longmapsto w \otimes v \end{aligned}$$

Então note que ψ é bilinear: de fato,

$\psi(\lambda v_1 + v_2, w) = w \otimes (\lambda v_1 + v_2)$

$= \lambda\, w \otimes v_1 + w \otimes v_2 = \lambda \Psi(v_1, w) + \Psi(v_2, w)$
e análogo p/ $\lambda w_1 + w_2$.
Segue da propriedade universal que $\exists! \tilde{\Psi} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ linear, definida por
$$\tilde{\Psi} \circ \phi = \Psi$$
$$\Rightarrow \tilde{\Psi} \circ \phi(v, w) = w \otimes v \Rightarrow \tilde{\Psi}(v \otimes w) = w \otimes v$$

Análogamente, o mapa
$$J : W \times V \longrightarrow V \otimes W$$
$$(w, v) \longmapsto v \otimes w$$
obtemos único mapa linear $\tilde{J} : W \otimes V \to V \otimes W$ tal que
$$\tilde{J}(w \otimes v) = v \otimes w$$
Daí, note que, para todo elemento da forma $v \otimes w \in V \otimes W$, temos
$$\tilde{J} \circ \tilde{\Psi}(v \otimes w) = v \otimes w = Id(v \otimes w)$$
$$\tilde{\Psi} \circ \tilde{J}(w \otimes v) = w \otimes v = Id(w \otimes v)$$
Como ambos são lineares e coincidem nos geradores, temos $\tilde{J} \circ \tilde{\Psi} = Id_{V \otimes W}$, $\tilde{\Psi} \circ \tilde{J} = Id_{W \otimes V}$
logo são isomorfismos.

Ex 3)

Defina

$$\Psi : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \times \mathcal{F}_0(Y, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}_0(X \times Y, \mathbb{K})$$
$$(f, g) \longmapsto f \triangle g : X \times Y \to \mathbb{K}$$
$$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

Note que Ψ está bem definida, pois, se $supp(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $supp(g) = \{y_1, \ldots, y_m\}$, então é fácil ver que

$$supp(f \otimes g) = \{(x_i, y_j), 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m\}$$

é finito.

Além disso, Ψ é bilinear, pois

$$\Psi(\lambda f_1 + f_2, g)(x, y) = (\lambda f_1 + f_2)(x) g(y)$$
$$= \lambda f_1(x) g(y) + f_2(x) g(y)$$
$$= \lambda \Psi(f_1, g)(x, y) + \Psi(f_2, g)(x, y)$$
$$= (\lambda \Psi(f_1, g) + \Psi(f_2, g))(x, y)$$

$\forall (x, y) \in X \times Y \Rightarrow \Psi(\lambda f_1 + f_2, g) = \lambda \Psi(f_1, g) + \Psi(f_2, g)$

Análogo p/ $\Psi(f, \lambda g_1 + g_2)$.

Assim, $\exists! \, \tilde{\Psi} : \mathcal{F}_0(X, \mathbb{K}) \otimes \mathcal{F}_0(Y, \mathbb{K}) \to \mathcal{F}_0(X \times Y, \mathbb{K})$ linear tal que $\tilde{\Psi}(f \otimes g) = f \triangle g$

Vamos definir nos elementos da base

Base p/ $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$

$$\hookrightarrow \delta_x(y) = \begin{cases} 1_{\mathbb{K}}, & \text{se } x = y \\ 0_{\mathbb{K}}, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

$\{\delta_x^X ; x \in X\}$ base de $\mathcal{F}_0(X, \mathbb{K})$

$\{\delta_x^Y ; x \in Y\}$ base de $\mathcal{F}_0(Y, \mathbb{K})$

$\{\delta_{(x,y)} ; (x,y) \in X \times Y\}$ base de $\mathcal{F}_0(X \times Y, \mathbb{K})$

Defina ψ $\mathcal{F}_0 X \times \mathcal{F} Y \longrightarrow \mathcal{F}(X \times Y)$

$$(\delta_x, \delta_y) \longmapsto \delta_{(x,y)}$$

na base e estenda por linearidade

↳ pela PROP. Universal estende p/ tensor

Defina na base

$$\chi : \mathcal{F}_0(X \times Y) \longrightarrow \mathcal{F}_0(X) \otimes \mathcal{F}_0(Y)$$

$$\delta_{(x,y)} \longmapsto \delta_x \otimes \delta_y$$

e estenda por linearidade!

é claramente inversa!

Ex 15)

De fato, considere

$$\phi^{\wedge}: V^p \longrightarrow \Lambda^p(V)$$
$$(v_1,\dots,v_p) \longmapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_p$$

a aplicação p-alternada natural.
Em particular, ϕ é p-linear, logo, pela prop. universal $\exists!\ \Gamma: V^{\otimes p} \to \Lambda^p(V)$
tal que $\Gamma \circ \phi = \phi^{\wedge}$
i.e: $\Gamma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \to v_1 \wedge \dots \wedge v_p$

Ex 16) Análogo ao ex 15 (basta tomar $\phi^{\odot}$ a aplicação p-simétrica natural.

Ex 4)

Defina

$$\Psi: V \times W \longrightarrow \mathcal{L}(V^*, W)$$
$$(v, w) \longmapsto \Psi(v,w)$$

onde $\Psi(v,w)(f) = f(v)\cdot w \in W$

Note que Ψ é bilinear: de fato,

$$\Psi(\lambda v_1 + v_2, w)(f) = f(\lambda v_1 + v_2)\cdot w$$
$$= (\lambda f(v_1) + f(v_2))w$$
$$= \lambda f(v_1) w + f(v_2) w$$
$$= (\lambda \Psi(v_1, w) + \Psi(v_2, w))(f)$$

$\forall f \in V^* \Rightarrow \Psi(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda \Psi(v_1, w) + \Psi(v_2, w)$

e

$$\Psi(v, \lambda w_1 + w_2)(f) = f(v)(\lambda w_1 + w_2)$$
$$= \lambda f(v) w_1 + f(v) w_2$$
$$= (\lambda \Psi(v, w_1) + \Psi(v, w_2))(f)$$

$\forall f \in V^*$

$$\Rightarrow \Psi(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda \Psi(v, w_1) + \Psi(v, w_2)$$

Segue da propriedade universal do produto tensorial que $\exists ! \Gamma : V \otimes W \to \mathcal{L}(V^*, W)$ satisfazendo $\Gamma(v \otimes w)(f) = f(v) w$

linear.

b) Note que: $\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$
$$= \dim V^* \dim W$$
$$= \dim \mathcal{L}(V^*, W)$$

se todas são finitas, logo, basta ver que Γ é injetiva.

De fato, suponha $\Gamma(v \otimes w) = 0$

$$\Rightarrow \forall f \in V^*, \Gamma(v \otimes w)(f) = 0 \in W$$
$$\Rightarrow f(v) \cdot w = 0, \ \forall f \in V^*$$

Em particular, se $\{v, v_2, \dots, v_n\}$ é base de V, $f = v^*$, temos $f(v) = 1$

$$\Rightarrow \Gamma(v \otimes w)(v^*) = 0$$
$$\Rightarrow w = 0$$

$\Rightarrow v \otimes w = 0 \Rightarrow \Gamma$ é injetiva $\square$

Exc 8)

$$\begin{tikzcd}
(V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(v,w)"', "\underset{\text{bilinear}}{\psi}"'] & (V_1 \cap V_2) \otimes (W_1 \cap W_2) \arrow[dl, "\exists! \tilde{\psi} \text{ linear}"] \\
(V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2) &
\end{tikzcd}$$

$$v \otimes w$$

$$\psi : (V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2) \longrightarrow (V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2)$$
$$(v, w) \longmapsto v \otimes w$$

Note que é bilinear:

$$\psi(\lambda v_1 + v_2, w) = (\lambda v_1 + v_2) \otimes w$$
$$= \lambda (v_1 \otimes w) + v_2 \otimes w$$
$$= \lambda \psi(v_1, w) + \psi(v_2, w)$$

Análogo em w.

Logo, $\exists! \tilde{\psi} : (V_1 \cap V_2) \otimes (W_1 \cap W_2) \longrightarrow (V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2)$

Vejamos que $\tilde{\psi}$ é injetiva:

De fato, suponha que $\tilde{\psi}(v \otimes w) = 0$

Então

$$\psi(v, w) = 0 = v \otimes w$$

$\Rightarrow v = 0$ ou $w = 0 \Rightarrow v \otimes w = 0 \Rightarrow \Psi$ é injetiva

Agora, dado $v \otimes w \in (V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2)$
temos

$$v \otimes w \in V_1 \otimes W_1 \Rightarrow v \in V_1, w \in W_1$$

e

$$v \otimes w \in V_2 \otimes W_2 \Rightarrow v \in V_2, w \in W_2$$

$$\Longrightarrow (v, w) \in (V_1 \cap V_2) \times (W_1 \cap W_2)$$

e logo $\Psi(v, w) = v \otimes w$

$$\Rightarrow \tilde{\Psi}(v \otimes w) = v \otimes w$$

Tomando $\mathcal{B} = \{v_i \otimes w_i ; i \in I\}$ base de $(V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_2)$, temos então que p/ cada elemento da base, existe elemento no domínio levado nele, donde concluímos a sobrejetividade de $\tilde{\Psi}$ (pois esta é linear). Segue que é isomorfismo $\square$

Ex) 5)

a) $T_i \in \mathcal{L}(V_i, V_i')$
T_i sobre $\Longrightarrow T_1 \otimes \dots \otimes T_p$ sobre

$$T_1 \otimes \dots \otimes T_p : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \longrightarrow V_1' \otimes \dots \otimes V_p'$$
$$v_1 \otimes \dots \otimes v_p \longmapsto T_1(v_1) \otimes \dots \otimes T_p(v_p)$$

Dado $\sum_{i=1}^{k} w_1^i \otimes \dots \otimes w_p^i \in V_1' \otimes \dots \otimes V_p'$

temos $w_j^i \in V_j'$, $\forall j i \Rightarrow \exists v_j^i \in V_j$ tq $T_j(v_j^i) = w_j^i$

Considere
$$\sum_{i=1}^{n} v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i \in V_1 \otimes \dots \otimes V_p$$

$$\Rightarrow (T_1 \otimes \dots \otimes T_p)\left(\sum_{i=1}^{n} v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (T_1 \otimes \dots \otimes T_p)(v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T_1(v_1^i) \otimes \dots \otimes T_p(v_p^i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_1^i \otimes \dots \otimes w_p^i$$

Exc 6) $tr(T\otimes T) = (tr(T))^2$

$det(T\otimes T) = (det(T))^{2n}$

Dems)

Seja $T: V \to V$, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

Seja

$\mathcal{B}' = \{v_i \otimes v_j;\ 1 \leq i \leq j \leq n\}$ base de $V\otimes V$

E $T\otimes T: V\otimes V \to V\otimes V$

Sabemos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) \text{ onde } T(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

$$T\otimes T(v_i \otimes v_j) = T(v_i) \otimes T(v_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \otimes \sum_{l=1}^{n} a_{lj} v_l$$

$$= \underbrace{\sum_{k} \sum_{l} a_{ki} a_{lj}}_{\text{Matriz de } T\otimes T} (v_k \otimes v_l)$$

Assim

$$tr(T\otimes T) = \sum_{i} \sum_{j} a_{ii} a_{jj}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)\left(\sum a_{jj}\right)$$

$$= (tr(T))^2$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow T \otimes T = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & a_{12}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \hline a_{21}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & a_{22}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{12}a_{11} & a_{12}^2 \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}a_{12} & a_{22}a_{11} & a_{22}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{21}a_{22} & a_{22}a_{21} & a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

Note que $T \otimes T = (T \otimes Id) \circ (Id \otimes T)$

$\Rightarrow \det(T \otimes T) = \det(T \otimes Id) \cdot \det(Id \otimes T)$

Mas

$$T \otimes Id = \begin{pmatrix} [T] & & & \\ & [T] & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [T] \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(T \otimes Id) = \det(T)^n$

Análogo p/ $Id \otimes T \Rightarrow \det(T \otimes T) = \det(T)^{2n}$

Exercício 5)

d) Seja $\mathcal{B}_i = \{v^i_1, \dots, v^i_n\}$ base de V_i, de modo que $\mathcal{B}' = \{v^1_{i_1} \otimes \dots \otimes v^p_{i_p}\}$ é base de $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$

Assim

$$(T_1 \otimes \dots \otimes T_p) \circ (S_1 \otimes \dots \otimes S_p)(v^1_{i_1} \otimes \dots \otimes v^p_{i_p})$$
$$= (T_1 \otimes \dots \otimes T_p)(S_1(v^1_{i_1}) \otimes \dots \otimes S_p(v^p_{i_p}))$$
$$= T_1(S_1(v^1_{i_1})) \otimes \dots \otimes T_p(S_p(v^p_{i_p}))$$
$$= (T_1 \circ S_1)(v^1_{i_1}) \otimes \dots \otimes (T_p \circ S_p)(v^p_{i_p})$$
$$= (T_1 \circ S_1) \otimes \dots \otimes (T_p \circ S_p)(v^1_{i_1}, \dots, v^p_{i_p})$$

Assim como coincidem numa base, concluímos que os operadores são os mesmos. □

e) De fato, por (d) temos que:

$$(T_1 \otimes \dots \otimes T_p) \circ (T_1^{-1} \otimes \dots \otimes T_p^{-1}) =$$
$$= (T_1 \circ T_1^{-1}) \otimes \dots \otimes (T_p \circ T_p^{-1})$$
$$= Id \otimes \dots \otimes Id = Id_{V_1 \otimes \dots \otimes V_p}$$

Logo $T^{-1} \otimes \dots \otimes T_p^{-1} = (T_1 \otimes \dots \otimes T_p)^{-1}$.

f) Note que se $v_1 \otimes \dots \otimes v_p \in V_1 \otimes \dots \otimes V_p$:

$$T_1 \otimes \dots \otimes T_i + T_i' \otimes \dots \otimes T_p (v_1, \dots, v_i, \dots, v_p) =$$
$$= T(v_1) \otimes \dots \otimes T_i + T_i'(v_i) \otimes \dots \otimes T_p(v_p)$$
$$= T(v_1) \otimes \dots \otimes T_i(v_i) + T_i'(v_i) \otimes \dots \otimes T_p(v_p)$$

$= T_1(v_1) \otimes \dots \otimes T_i(v_i) \otimes \dots \otimes T_p(v_p) +$

$+ T_1(v_1) \otimes \dots \otimes T_i'(v_i) \otimes \dots \otimes T_p(v_p)$

$= (T_1 \otimes \dots \otimes T_i \otimes \dots \otimes T_p) + (T_1 \otimes \dots \otimes T_i' \otimes \dots \otimes T_p)(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$

Como os elementos da forma $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$, geram $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$, segue que as transf. coincidem. $\square$

h) Se $\sum_{i=1}^{n} v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i$ e $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$, então

$Id_{V_1} \otimes \dots \otimes Id_{V_p}\left(\sum v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i\right)$

$= \sum_{i=1}^{n} Id_{V_1} \otimes \dots \otimes Id_{V_p}(v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i)$

$= \sum_{i=1}^{n} Id_{V_1}(v_1^i) \otimes \dots \otimes Id_{V_p}(v_p^i)$

$= \sum_{i=1}^{n} v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i = Id_{V_1 \otimes \dots \otimes V_p}(v_1^i \otimes \dots \otimes v_p^i)$ $\square$

Exc 9) Define

$$T': V_1^* \times \dots \times V_p^* \to (V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^*$$
$$(f_1, \dots, f_p) \mapsto f_1 \otimes \dots \otimes f_p$$

onde $f_1 \otimes \dots \otimes f_p)(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \prod f_i(v_i)$

Note que T' é p-linear:

De fato,

$$T'(\alpha f_1 + f_1', \dots, f_p)(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$$
$$= (\alpha f_1 + f_1')(v_1) \cdot f_2(v_2) \cdot \dots \cdot f_p(v_p)$$
$$= \alpha f_1(v_1) \cdot \dots \cdot f_p(v_p) + f_1'(v_1) \dots f_p(v_p)$$
$$= \alpha T'(f_1, \dots, f_p)(v_1, \dots, v_p) + T'(f_1', \dots, f_p)(v_1, \dots, v_p)$$

$\forall v_1, \dots, v_p$.

logo, $\exists! T: V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* \to (V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^*$ satisfazendo isso.

Agora, suponha que

$$T(f_1 \otimes \dots \otimes f_p) = 0$$

$\Rightarrow$

$$T(f_1^i \otimes \dots \otimes f_p^i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T(f_1^i \otimes \dots \otimes f_p^i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_1^i(v_1) \cdots f_p^i(v_p) = 0, \quad \forall (v_1, \dots, v_p)$$

$$\Rightarrow \forall (v_1, \dots, v_p), \exists i \in \{1, \dots, p\}\ f_i(v_i) = 0$$

Suponha que $f_i \neq 0$, $\forall i$.
Então $\exists v_1$ t.q. $f_1(v_1) \neq 0$
$\exists v_2$ t.q. $f_2(v_2) \neq 0$
Procedendo assim, obtemos $(v_1, \dots, v_p)$
tal que $f_i(v_i) \neq 0$, $i = 1, \dots, p$.
Mas daí:
$$T(f_1 \otimes \dots \otimes f_p)(v_1, \dots, v_p) \neq 0 \rightarrow\leftarrow$$
Logo, $\exists i$, $f_i = 0 \Rightarrow f_1 \otimes \dots \otimes f_p = 0 \Rightarrow T$ é injetora. $\square$

Ex 11)

Suponha $T=(a_{ij})_{\mathcal{B}}$, de modo que

$$T(e_j)=\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\, e_i$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Lambda^2(T)(e_2\wedge e_3) &= T(e_2)\wedge T(e_3)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} a_{i2}e_i\right)\wedge \sum_{j=1}^{3} a_{j3}e_j\\
&= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i2}a_{j3}\, e_i\wedge e_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cancelto{0}{a_{12}a_{13}e_1\wedge e_1} + a_{12}a_{23}\, e_1\wedge e_2 +\\
&+ a_{12}a_{33}\, e_1\wedge e_3 + a_{22}a_{13}\, e_2\wedge e_1 +\\
&+ \cancelto{0}{a_{22}a_{23}e_2\wedge e_2} + a_{22}a_{33}\, e_2\wedge e_3 +\\
&+ a_{32}a_{13}\, e_3\wedge e_1 + a_{32}a_{23}\, e_3\wedge e_2 +\\
&+ \cancelto{0}{a_{32}a_{33}e_3\wedge e_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})\, e_2\wedge e_3 +\\
&+ (a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})\, e_1\wedge e_3 +\\
&+ (a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\, e_1\wedge e_2
\end{aligned}$$

Logo, a primeira coluna de $\Lambda(T)$

será: $\begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} \\ a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} \\ a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \end{bmatrix}$

Já p/ a segunda coluna:

$$\Lambda^2(T)(e_1 \wedge e_3) = (Te_1) \wedge T(e_3)$$
$$= \left(\sum a_{i1} e_i\right) \wedge \left(\sum a_{i3} e_i\right)$$
$$= \dots$$

Ex 12)

Suponha $v_1, \dots, v_p$ é L.D.
Então $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ não todos nulos tais que
$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \quad (\star)$$
Suponha, SPG, $\alpha_1 \neq 0$. Então
$$(\star) \Rightarrow v_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} v_2 + \dots + \frac{-\alpha_p}{\alpha_1} v_p$$
Assim
$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p = \sum_{i=2}^{p} \frac{-\alpha_i}{\alpha_1} v_i \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p$$
$$= \sum_{i=2}^{p} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1} \underbrace{(v_i \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p)}_{0}$$
$$= 0$$

Suponha agora que $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = 0$

Então para todo mapa linear $T : \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$, $T(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = 0$.

Agora, seja $\Psi : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ multilinear alternada. Então, pela prop. universal, $\exists! \tilde{\Psi}$ tal que $\Psi = \tilde{\Psi} \circ \phi$, onde $\phi : V \times \dots \times V \to \Lambda^k(V)$ é a projeção. Mas assim $\Psi(v_1, \dots, v_k) = \tilde{\Psi}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = 0$

Logo, todo mapa multilinear alternado em $V \times \dots \times V$ é zero em $(v_1, \dots, v_k)$.

Em particular, $\det_i : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$ dado por

$$\det_i(w_1, \dots, w_k) = \det \text{ do } i\text{-ésimo } k \times k \text{ menor da matriz } [w_1 \dots w_k]$$

é multilinear alternado e logo 0, p/ $i = 1, \dots, n-k$.

Isso implica que não há mais que $k-1$ linhas L.I. na matriz $\Rightarrow$ posto$([v_1, \dots, v_k]) \leq k-1$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_k$ é L.D. $\square$

Ex 13)

$$T_1 : V \longrightarrow W$$
$$\Lambda^p(T_1) : \Lambda^p(V) \longrightarrow \Lambda^p(W)$$
$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p \longmapsto T(v_1) \wedge \dots \wedge T(v_p)$$

a) Seja $\sum_{i=1}^{n} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_p} \in \Lambda^p(W)$ vetor qualquer.

Como $T_1 : V \longrightarrow W$ é sobre, p/ cada $w_{i_j} \in W$ $\exists\, v_{i_j} \in V$ tal que $T_1(v_{i_j}) = w_{i_j}$.

Segue que

$$\Lambda^p(T_1)\left(\sum_{i=1}^{n} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Lambda^p(T_1)(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} T_1(v_{i_1}) \wedge \dots \wedge T_1(v_{i_p})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_{i_1} \wedge \dots \wedge w_{i_p}$$

$\Rightarrow \Lambda^p(T_1)$ é sobrejetora.

b) Seja T_1 injetora e $\mathcal{B} = \{v_i \,;\, i \in I\}$ base de V.

Como T é injetora, $T(\mathcal{B}) = \{T(v_i) \,;\, i \in I\}$ é L.I.

Assim

$$\mathcal{U} = \{ T(v_{i_1}) \wedge \dots \wedge T(v_{i_n}) \,;\, i_j \neq i_k, j \neq k \}$$ é L.I. em $\Lambda^k(W)$

Seja $v \in \ker(\Lambda^k(T)) \subseteq \Lambda^k(V)$

$$\Rightarrow v = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_p} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$$

$\Rightarrow$

$$0 = \Lambda^k(T)(v) = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_p} \underbrace{T(v_{i_1}) \wedge \dots \wedge T(v_{i_p})}_{\text{L.I.}}$$

$\Rightarrow \alpha_{i_1, \dots, i_p} = 0, \ \forall (i_1, \dots, i_p)$

$\Rightarrow v = 0 \therefore \Lambda^k(T)$ é injetiva

d) Seja $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in \Lambda^k(V)$ tensores elementares qualquer. Então

$$\begin{aligned}
\Lambda^p(T_2 \circ T_1)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) &= T_2 \circ T_1(v_1) \wedge \dots \wedge T_2 \circ T_1(v_p) \\
&= T_2(T_1(v_1)) \wedge \dots \wedge T_2(T_1(v_p)) \\
&= \Lambda^p(T_2)(T_1(v_1) \wedge \dots \wedge T_1(v_p)) \\
&= \Lambda^p(T_2)(\Lambda^p T_1(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)) \\
&= \Lambda^p(T_2) \circ \Lambda^p(T_1)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)
\end{aligned}$$

Logo $\Lambda^p(T_2 \circ T_1)$ coincide c/ $\Lambda^p(T_2) \circ \Lambda^p(T_1)$ em vetores elementares. Como estes geram $\Lambda^k(V)$, segue que coincidem em todo espaço $\square$

Ex 10)

a) Defina $S': V \times W \to V \otimes W$
$(v, w) \mapsto T(v) \otimes w$

Note que S' é bilinear:

$$S'(\lambda v_1 + v_2, w) = T(\lambda v_1 + v_2) \otimes w$$
$$= (\lambda T(v_1) + T(v_2)) \otimes w$$
$$= \lambda (T(v_1) \otimes w) + T(v_2) \otimes w$$
$$= \lambda S'(v_1, w) + S'(v_2, w)$$

Análogo p/ $S'(v, \lambda w_1 + w_2)$.

Assim, pela propriedade universal, segue que $\exists ! S: V \otimes W \to V \otimes W$ linear tal que

$$S(v \otimes w) = T(v) \otimes w$$

b) Seja $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Assim,

$$g(S)(v \otimes w) = (a_n S^n + \dots + a_1 S + a_0 Id)(v \otimes w)$$
$$= a_n S^n(v \otimes w) + \dots + a_1 S(v \otimes w) + a_0 v \otimes w \quad (*)$$

Mas,

$$S^2(v \otimes w) = S(S(v \otimes w))$$
$$= S(T(v) \otimes w)$$
$$= T^2(v) \otimes w$$

donde segue por indução que

$$S^n(v \otimes w) = T^n(v) \otimes w, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\forall v \otimes w$$

Assim

$$\circledast = a_n T^n(v)\otimes w + \dots + a_1 T(v)\otimes w + a_0 v\otimes w$$
$$= (a_n T^n(v) + \dots + a_1 T(v) + a_0 v)\otimes w$$
$$= g(T)(v)\otimes w$$
$$= (g(T)\otimes Id)(v\otimes w)$$

Logo $g(S) = g(T)\otimes Id$ em vetores básicos e portanto coincidem.

c) Suponha $f(T)=0$.
Então
$$f(S)(v\otimes w) = f(T)v\otimes w$$
$$= 0\otimes w = 0$$

Como $v\otimes w\in V\otimes W$ foi vetor elementar qqer, segue que $f(S)\equiv 0$.
Agora suponha $f(S)=0$
Tome $w\in W$, $w\neq 0$. Então
$$0 = f(S)(v\otimes w) = f(T)(v)\otimes w$$
Mas $w\neq 0 \Rightarrow f(T)=0$.
Como $v\in V$ foi arbitrário, segue que $f(T)=0$ $\forall$

Suponha T diagonalizável e seja m_T o polinômio minimal de T. Então m_T é produto de fatores lineares. Mas então $m_T(T)=0 \Rightarrow m_T(S)=0$, logo $m_S \mid m_T \Rightarrow m_S$ é produto de fatores linea

res $\Rightarrow S$ é diagonalizável.
Revertendo o papel de T e S, concluímos o análogo (S diag $\Rightarrow T$ diag)