Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada
Lista 2: Transformações Lineares

Exercício 1. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear. Mostre que

a. $T(0_U) = 0_V$, onde 0_U e 0_V denotam os vetores nulos de U e V, respectivamente.

b. $T(-u) = -T(u)$, para cada $u \in U$.

c. $T(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i T(u_i)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e $u_i \in U$ para $i = 1, \dots, m$.

Exercício 2. Mostre que:

a. Se $T, G : U \to V$ são transformações lineais então $T + G : U \to V$ é uma transformação linear.

b. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear então $\alpha T : U \to V$ é uma transformação linear para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

c. Se $T : U \to V$ e $G : V \to W$ são transformações lineais então $G \circ T : U \to W$ é uma transformação linear.

Exercício 3. Seja $V = (0, \infty)$, dados $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ defina as operações:

$$x + y := x \cdot y$$
$$\alpha \cdot x := x^{\alpha}$$

Verifique que V com essas operações é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e que $T : V \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = \ln(x)$ é uma transformação linear.

Exercício 4. Seja $T : U \to V$ uma transformação linear e $U' \subseteq U, V' \subseteq V$ subespaços vetoriais. Mostre que $T\left(U'\right)$ é um subespaço de V e que $T^{-1}\left(V'\right)$ (pré-imagem de V' por T) é um subespaço de U. Conclua que $\operatorname{Im}(T)$ é um subespaço de V e $\ker(T)$ é um subespaço de U.

Exercício 5. Seja $\mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ o espaço dos polinômios de grau menor que n e seja A_h o operador diferença

$$A_h(p(x)) := \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

sendo h um número fixo não nulo. Ache o kernel e a imagem desse operador.

Exercício 6. Sejam U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : U \to U$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Seja $W = \{x \in U : T(x) = x\}$ e $V = \{x \in U : T(x) = 0\}$. Prove que:

a. $U = W \oplus V$

b. $T(U) = W$

c. $T(V) = \{0\}$.

Exercício 7. O Teorema do Kernel-Imagem afirma que se $T : U \to V$ é uma transformação linear e $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$ então $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(T)) < \infty$ (claramente) e $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(T) < \infty$. Mostraremos a seguir a recíproca do teorema: Se $T : V \to W$ é um transformação linear e $\{u_1, ..., u_k\}$ e $\{T(v_1), ..., T(v_l)\}$ são bases de $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$, respectivamente, mostre que $\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_l\}$ é uma base de V.

Exercício 8. Sejam U e V dois $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Se $\{u_i\}_{i\in I}$ for uma base de U e se $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$, mostre que existe uma única transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para cada $i \in I$. (Teorema provado em sala de aula sem a hipótese de $\dim_{\mathbb{K}} U < \infty$)

Exercício 9. Seja $\{u_i\}_{i\in I}$ uma base de V. Então para qualquer $v \in V$ existe uma única família $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ de elementos em $\mathbb{K}$ com *suporte* finito (i.e. o conjunto $\mathrm{Supp}(\{\alpha_i\}_{i\in I}) = \{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ é finito) tal que $v = \sum_{i\in I} \alpha_i u_i$. Ou seja também podemos definir "coordenadas" de um vetor se o espaço tiver dimensão infinita.

Exercício 10. Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{K}$.

a. Se n for ímpar, prove que não existe nenhuma transformação linear $T : V \to V$ tal que $\mathrm{Im}(T) = \ker(T)$.

b. Mostre que a afirmação anterior é falsa se n for par.

Exercício 11. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear.

a. Mostre que se $\mathscr{B} = \{u_i\}_{i\in I}$ for uma base de U então $\{T(u_i)\}_{i\in I}$ gera $\mathrm{Im}(T)$.

b. Prove que T é injetora se e somente se T leva cada subconjunto LI de U em um subconjunto LI de V. Conclua que neste caso $\dim_{\mathbb{K}} U \leq \dim_{\mathbb{K}} V$.

c. Mostre que T é um isomorfismo se e somente se T leva base em base. Conclua que se $U \simeq V$ então $\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$.

d. Prove que se o conjunto $\{T(u_1), \ldots, T(u_r)\}$ for LI em V, então $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é LI em U.

Exercício 12. Mostre que não existe uma transformação linear de $\mathbb{K}^5$ para $\mathbb{K}^2$ com kernel dado por $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = 3x_2 \text{ e } x_3 = x_4 = x_5\}$.

Exercício 13. Sejam $a, b \in \mathbb{C}$ número complexos não nulos. Considere o conjunto das sequências definidas indutivamente como segue:

$$V := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n\}$$

Mostre que V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão 2. (Dica: encontre um isomorfismo $T : V \to \mathbb{C}^2$)

Exercício 14. Dada $T : V \to V$ uma transformação linear e W um subespaço de V. Defina a aplicação $T' : V/W \to V/W$ por

$$T'(v + W) = T(v) + W$$

Quando T' está bem definida e é uma aplicação linear? Quais são $\mathrm{Im}(T')$ e $\ker(T')$?

Exercício 15. Uma *sequência exata* de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais V_i de dimensão finita

$$V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} \cdots \xrightarrow{T_n} V_n$$

é uma sequência de transformações lineares T_i tais que $\ker T_{i+1} = \mathrm{Im}\, T_i$ para $i = 0, \ldots n$.

a. Mostre que a sequência $0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2$ é exata se e somente se T_1 é injetora.

b. Mostre que a sequência $V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} 0$ é exata se e somente se T_0 é sobrejetora.

c. Considere a sequência exata

$$0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} V_4 \xrightarrow{T_4} 0$$

na qual $\dim_{\mathbb{K}} V_i = d_i$, mostre que $d_1 + d_3 = d_2 + d_4$.

Exercício 16. Um *complexo* é definido com sendo um par (C,d) onde $C=(C_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ é uma família de espaços vetoriais, junto com uma família de $d=(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de aplicações lineais $d_i : C_i \to C_{i+1}$ satisfazendo a seguinte condição $d_{i+1}\circ d_i = 0$. Um complexo é usualmente representado como segue:

$$C : \cdots \xrightarrow{d_{i-2}} C_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} C_i \xrightarrow{d_i} C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots$$

a. O *i-ésimo espaço de cohomologia* de um complexo (C,d) é definido como o quociente $H^i(C,d) := \ker(d_i)/\operatorname{Im}(d_{i-1})$. Mostre que este espaço está bem definido, i.e. mostre que para todo $i\in\mathbb{Z}$ temos $\operatorname{Im}(d_{i-1}) \subseteq \ker(d_i)$.

b. Suponha que o complexo (C,d) tem dimensão finita (i.e. $\dim(C_i) < \infty$ para todo $i\in\mathbb{N}$) e é limitado, ou seja existem $n,m\in\mathbb{Z}$ tais que $C_i=\{0\}$ se $i\notin\{m,\dots,n\}$. Neste caso podemos definir a *característica de Euler* de (C,d) como sendo

$$\chi(C,d) := \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \dim(C_k).$$

Mostre que $\chi(C,d) = \sum_{k=m}^{n}(-1)^k \dim(H^k(C,d))$.

Exercício 17. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear. Suponha que exista $G : V \to V$ tal que $T\circ G = \mathrm{Id}_V$. Prove que T é um isomorfismo e $G = T^{-1}$. Dê um exemplo que mostre que isso é falso quando a dimensão de V não for finita.

Exercício 18. Prove que dada $T : U \to V$ uma transformação linear, então temos:

$$\frac{U}{\ker(T)} \simeq \operatorname{Im}(T)$$

Exercício 19. Seja $T : V \to W$ uma transformação linear sobrejetora. Mostre que existe uma bijeção entre o conjunto dos subespaços de V contendo $\ker(T)$ e subespaços de W.

Exercício 20. Dado $V = U\oplus W$ mostre que a função $T : U \to V/W$ dada por $u\mapsto u+W$ é um isomorfismo, ou seja mostre que quaisquer dois complementos de W em V (lembre que não necessariamente é único) são isomorfos e, mais ainda, são isomorfos ao quociente V/W. Mostre também que a inversa não é verdadeira, ou seja, mostre que espaços isomorfos não necessariamente admitem um complemento comum.

Exercício 21. Dados um espaço vetorial V e dois subespaços $U,W\subseteq V$. Mostre que

a. $\frac{(W+U)}{U} \simeq \frac{W}{W\cap U}$

b. Se $W\subseteq U\subseteq V$ então $\frac{V}{U} \simeq \frac{\frac{V}{W}}{\frac{U}{W}}$

Exercício 22. Prove que $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$.

Exercício 23. Seja V o espaço das funções reais contínuas no intervalo fechado $[a,b]$, $V=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ e seja $W=\mathrm{Const}[a,b]$ o espaço das funções constantes em $[a,b]$

a. Prove que W é isomorfo a $\mathbb{R}$

b. Prove que V/W é isomorfo ao espaço vetorial das funções continuas em $[a,b]$ que se anulam em a.

Exercício 24. Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n e m e bases fixas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, respectivamente. Prove que dada uma matriz $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ existe uma única transformação linear $T : U\to V$ tal que $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = A$.

Exercício 25. Sejam U e V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n e m e bases fixas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$, respectivamente. Sejam $T,G : U\to V$ duas transformações lineares. Mostre que:

a. $[T+G]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} + [G]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$

b. $[\alpha \cdot T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'} = \alpha \cdot [T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercício 26. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e sejam S e T operadores lineares em V. Quando existem bases orenadas $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ de V tal que $[S]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = [T]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'}$?

Exercício 27. Seja $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ a transformação linear dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Determine a matriz de T relativa à base $\mathscr{B} = \{1, 1+x, 1+x^2, \ldots, 1+x^n\}$.

Exercício 28. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ z-w & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Determine a matriz de T com relação à base canônica.

b. Determine a matriz de T com relação à base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $M_2(\mathbb{R})$.

c. Exiba a matriz M tal que $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = M^{-1}[T]^{\text{Can}}_{\text{Can}} M$.

Exercício 29. Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que:

a. Dadas A e B duas matrizes sobre $\mathbb{K}$ é impossível termos $AB - BA = I$.

b. Conclua que não existem transformações lineais T, G sobre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita tais que $T \circ G - G \circ T = \text{Id}$.

c. Mostre que isso não acontece se desconsiderarmos a hipóteses de dimensão finita.

Exercício 30. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ a função dada por $T[(a,b,c)_{\mathscr{B}}] = (2c - 2b, a + c, a + b + c)_{\mathscr{C}}$ onde $\mathscr{C}$ é a base $\{1, x, x^2\}$ e $\mathscr{B}$ é a base $\{1, x + x^2, 1 + x^2\}$.

a. Verifique que T é uma transformação linear.

b. Existe um vetor $u \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ não nulo tal que $T(u) = u$? Justifique sua resposta.

Exercício 31. Seja $\pi : V \to V$ um operador projeção. Mostre que:

a. Existe uma base $\mathscr{B}$ de V na qual $[\pi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Um endomorfismo $T \in \mathscr{L}(V)$ de um espaço vetorial arbitrário V comuta com um operador projeção π se e somente se $\text{Im}(\pi)$ e $\ker(\pi)$ são *invariantes* por T (um subespaço $W \subseteq V$ é invariante por $T \in \mathscr{L}(V)$ se $T(W) \subseteq W$).

c. Sejam π, τ dois operadores projeção, mostre que $\pi + \tau$ é um operador projeção se e somente se $\pi \circ \tau = \tau \circ \pi = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

d. No último caso, mostre que $\text{Im}(\pi + \tau) = \text{Im}(\pi) \oplus \text{Im}(\tau)$ e $\ker(\pi + \tau) = \ker(\pi) \cap \ker(\tau)$.

Exercício 32. Seja $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$. Mostre que existem operadores lineares $\pi_1, \ldots, \pi_r$ sobre V tais que:

a. cada π_i é uma projeção ($\pi_i^2 = \pi_i$)

b. $\pi_i \circ \pi_j = 0$ se $i \neq j$

c. $\text{Id} = \pi_1 + \cdots + \pi_r$

d. $\text{Im}(\pi_i) = V_i$ para $i = 1, \ldots, r$.

Exercício 33. Mostre que exibindo um isomorfismo:

a. Se U e V são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensões n e m, respectivamente, então $\mathscr{L}(U,V) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

b. Se $U \simeq U'$ e $V \simeq V'$ então $\mathscr{L}(U,V) \simeq \mathscr{L}(U',V')$.

c. Para qualquer espaço vetorial V, existe um isomorfismo *canônico* (i.e., um isomorfismo que não depende da base) $V \simeq \mathscr{L}(\mathbb{K},V)$.

Exercício 34. Considere as bases $\mathscr{B} = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathscr{B}' = \{(1,0),(i,0),(1,1),(1,i)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Determine as coordenadas da transformação linear $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^2$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a+bi, b+ci)$ com relação à base $\mathscr{C} = \{T_{ij}\}$ de $\mathscr{L}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}),\mathbb{C}^2)$ onde

$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases}$ para $u_k \in \mathscr{B}$ e $v_j \in \mathscr{B}'$, $i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3,4$.

Exercício 35. Dado V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e seja $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para V.

a. De acordo com um teorema visto em sala de aula, sabemos que existe um único operador linear $T : V \to V$ tal que $T(v_j) = v_{j+1}$ para $j = 1,\ldots,n-1$ e $T(v_n) = 0$. Escreva a matriz de T nessa base.

b. Prove que $T^n = 0$, mas $T^{n-1} \neq 0$.

c. Seja G um operador linear em V tal que $G^n = 0$ mas $G^{n-1} \neq 0$. Prove que existe uma base $\mathscr{B}'$ tal que a matriz para G nessa base é a matriz descrita na parte a.

d. Prove que se M e N são matrizes $n \times n$ tais que $M^n = N^n = 0$ mas $M^{n-1} \neq 0 \neq N^{n-1}$, então M e N são semelhantes.

Exercício 36. Considere as seguintes afirmações e decida se são Verdadeiras ou Falsas:

a. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ é linear e T é não nula, então existem pelo menos 2 vetores LI em $\mathbb{R}^4$ que não estão em $\mathrm{Im}(T)$.

b. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é linear e T é não nula, então é sobrejetora.

c. Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é linear, então $\dim_{\mathbb{R}} \ker T \neq \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T)$

d. Seja W um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$, $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. Então existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ com $\ker T = W$.

Exercício 37.

a. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão arbitrária, $a \in \mathbb{K} - \{0\}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$ satisfazendo a seguinte equação $a^2T - 3aT^2 + T^3 = 0_{\mathscr{L}(V)}$. Mostre que $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

b. Em geral, considere um polinômio $P \in \mathscr{P}(\mathbb{K})$ tal que $P(0) = 0$, $P'(0) \neq 0$ junto com um endomorfismo $T \in \mathscr{L}(V)$ tal que $P(T) = 0_{\mathscr{L}(V)}$. Mostre que $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

Exercício 38. Dados $\mathbb{K}$ um corpo, V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear fixo. Denote por $Z(T) = \{p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{K}) \mid p(T) = 0\}$. Mostre que:

a. Se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base enumerável $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ e $T : V \to V$ é o operador linear definido por $T(v_i) = v_{i+1}$, para $i = 1,2,\ldots$ então $Z(T) = \{0\}$.

b. Se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ é um operador linear de posto finito (i.e., $\dim \mathrm{Im}(T) < \infty$) então $Z(T) \neq \{0\}$.

c. Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V tem dimensão finita se e somente se $Z(T) \neq \{0\}$ para todo operador linear $T : V \to V$.

Exercício 1

a) $T(0_U) = T(0\cdot v) = 0\cdot T(v) = 0_V$

b) $T(-u) = T(-1\cdot u) = -1\cdot T(u) = -T(u)$

c) Provemos por indução em m. Claramente vale para $m=1$. Agora, suponha que vale para $m=n$. Então

$$T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \alpha_{n+1} u_{n+1}\right)$$
$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) + T(\alpha_{n+1} u_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i) + \alpha_{n+1} T(u_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T(u_i)$$

e logo vale p/ $m=n+1$ $\square$

Exercício 2:

De fato, sejam $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in U$, então

a) $$(T+G)(\lambda u+v) = T(\lambda u+v) + G(\lambda u+v)$$
$$= \lambda T(u) + T(v) + \lambda G(u) + G(v)$$
$$= \lambda(T(u) + G(u)) + T(v) + G(v)$$
$$= \lambda((T+G)(u)) + (T+G)(v)$$

b) $$(\alpha T)(\lambda u+v) = \alpha T(\lambda u+v) = \alpha\lambda T(u) + \alpha T(v)$$
$$= \lambda\alpha T(u) + \alpha T(v) = \lambda(\alpha T)(u) + (\alpha T)(v).$$

c) $$(G\circ T)(\lambda u+v) = G(T(\lambda u+v)) = G(\lambda T(u) + T(v))$$
$$= \lambda G(T(u)) + G(T(v))$$
$$= \lambda (G\circ T)(u) + (G\circ T)(v)$$

Exercício 3

De fato, seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$. Então

$$\ln(\lambda \cdot u + v) = \ln(u^{\lambda} \cdot v) = \ln(u^{\lambda}) + \ln(v)$$
$$= \lambda \ln(u) + \ln(v)$$

Exercício 4)

De fato, sejam $u, v \in T(U')$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Então $\exists\, u', v' \in U'$, $T(u') = u$, $T(v') = v$.
Assim
$$\lambda u + v = \lambda T(u') + T(v')$$
$$= T(\lambda u') + T(v') = T(\lambda u' + v')$$
Logo $\lambda u + v \in T(U')$ $\therefore$ $T(U')$ é subespaço.
Agora sejam $u, v \in T^{-1}(V')$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Então $T(u), T(v) \in V'$, logo
$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \in V'$$
e portanto $\lambda u + v \in T^{-1}(V')$.
Segue que $\mathrm{Im}(T) = T(U)$ e $\ker T = T^{-1}(\{0\})$ são subespaços vetoriais.

Exercício 5

Note que
$$p(x) \in \ker A_h \iff \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = 0$$
$$\iff p(x+h) = p(x)$$

Logo

$$\ker(A_h) = \{ p(x) : p(x+h) = p(x), \forall x \}$$

Além disso,

$$p(x) \in \operatorname{Im} A_h \iff \exists q(x) \mid \frac{q(x+h) - q(x)}{h} = p(x)$$

$$\iff p(x) = \frac{q(x+h) - q(x)}{h}$$

i.e.:

$$\operatorname{Im} A_h = \left\{ \frac{q(x+h) - q(x)}{h} : q(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K}) \right\}$$

Exercício 6

a) Dado $v \in V$, note que $T(v) \in W$, pois $T(T(v)) = T(v)$. Além disso, $v - T(v) \in V$ pois $T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = 0$, logo $v = T(v) + (v - T(v)) \therefore W + V = U$.

Além disso, se $v \in W \cap V \Rightarrow v = T(v) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow v = 0 \therefore U = V \oplus W$

b) Segue de a

c) Imediato.

Exercício 7:

De fato, como $\ker(T) \subset V$, temos que $\{u_1, \dots, u_k\}$ é conjunto l.i de V e que $\forall v \in V$, $v \in \ker(T)$, temos que $\exists \alpha_j$ $v = \sum \alpha_j u_j$.

Seja agora $v \in V \setminus \ker(T)$

Temos que $\lambda_j, j = 1, \dots, l$ não todos nulos tais que $T(v) = \sum \lambda_j T(v_j) = \sum T(\lambda_j v_j)$

$$= T\left(\sum \lambda_j v_j\right).$$

Donde temos que $v - \sum_{j=1}^{l} \lambda_j v_j \in \ker(T)$ $\therefore$ existem $\alpha_i, i = 1, \dots, k$ tais que

$$v - \sum \lambda_j v_j = \sum \alpha_i u_i$$

$$\Rightarrow \quad v = \sum \alpha_i u_i + \sum \lambda_j v_j$$

e logo $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$ gera V,

Ainda, sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{K}$ tais que

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{l} \beta_j v_j$$

Então

$$-\sum_{j=1}^{l} \beta_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in \ker T$$

logo $T\left(\sum_{j=1}^{l} \beta_j v_j\right) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{j=1}^{l} \beta_j T(v_j) = 0 \Rightarrow \beta_j = 0, \forall j = 1, \dots, l$$

Pois $\{T(v_1), \dots, T(v_l)\}$ é L.I. .

Mas então $\sum \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$

e $\{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$ é L.I. $\square$

Exercício 8)

De fato, note que, dado $u \in U$, $\exists!\, i_1, \dots, i_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_{i_j}$$

Defina $T : U \to V$ pondo $T(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}$.

Então é claro que $T(u_i) = v_i$, $\forall i \in I$.

Além disso, se $u = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_{i_j}$, $v = \sum_{l=1}^{r} \beta_l u_{k_l}$

Então $u + v = \sum \lambda_j u_{i_j} + \sum \beta_l u_{k_l}$ e logo

$$T(u+v) = \sum \lambda_j v_{i_j} + \sum \beta_l v_{k_l} = T(u) + T(v)$$

E claramente $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, logo T é linear.

Unicidade é imediata.

Exercício 9) Definição de base.

Exercício 10)

a) De fato, suponha por absurdo que sim.

Então $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im}(T) = n$ e assim

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 2n$$

contradição com $\dim V$ ser ímpar.

b) Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (y, 0)$$

Então $\operatorname{Im}(f) = \ker(f)$ ☺

Exercício 11

Sejam U e V $\mathbb{K}$-e.v.'s e $T: U \to V$ linear.

a) De fato, seja $v \in \mathrm{Im}\, T$. Então $\exists u \in U$, $u = \sum_j \lambda_j u_{k_j}$ tal que $T(u) = v$

Logo $v = T(u) = T(\sum_j \lambda_j u_{k_j}) = \sum_j \lambda_j T(u_{k_j})$

logo $\{T(u_j)\}_{j \in I}$ gera $\mathrm{Im}(T)$.

b) Suponha T injetora e seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ L.I. em U. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que

$$\sum_j \lambda_j T(u_j) = 0$$

Então $T(\sum_j \lambda_j u_j) = \sum_j \lambda_j T(u_j) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_j \lambda_j u_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j$.

Logo $\{T(u_j)\}_j$ é L.I.

Reciprocamente, se $\{u_j\}_j$ L.I. $\Rightarrow \{T(u_j)\}_j$ L.I., suponha que $u \in U$ tal que $T(u) = 0$

Escreva $u = \sum_j \lambda_j u_j$, onde $\{u_j\}_j$ é uma base qualquer de U. Então $T(u) = \sum_j \lambda_j T(u_j) = 0$. Mas, por hipótese, $\{T(u_j)\}_j$ é L.I., logo $\lambda_j = 0, \forall j \Rightarrow u = 0$ $\square$

Segue que se $\dim U = n$, dada $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de U, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é L.I. $\therefore$

$\dim V \geq n = \dim U$

c) De fato, se T é isomorfismo T e T^{-1} são injetoras. Segue de b que $\dim U \geq \dim V$ e que $\dim V \geq \dim U$ $\therefore \dim U = \dim V$
Como $\{T(u_i)\}_{i \in I}$ gera $Im(T) = V$ e é L.I., segue ∎

d) Sejam $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_j \lambda_j u_j = 0$.
Então

$$0 = T(0) = T\left(\sum_j \lambda_j u_j\right) = \sum_j \lambda_j T(u_j)$$

$\Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j \Rightarrow \{u_1, \dots, u_r\}$ é L.I.

Ex 12)

De fato, suponha que sim. Então uma base para tal kernel seria

$$\{(3,1,0,0,0);(0,0,1,1,1)\}$$

isto é, $\dim \ker T = 2$.
Daí $\quad 5 = \dim \mathbb{K}^5 = \dim \ker T + \dim Im T$
$\Rightarrow \dim Im T = 3$, absurdo pois $Im T \subset \mathbb{K}^2$.
Logo $\nexists$ tal T.

Exercício 13.

De fato, considere $T: V \to \mathbb{C}^2$ dado por
$$T(x_n) = (x_0, x_1)$$
Note que $T(x_n) = (0,0) \iff x_0 = x_1 = 0$
$$\iff x_n = 0, \forall n$$
logo T é injetiva. Além disso, dado $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1) \in \mathbb{C}^2$ considere $(x_n)_n \in V$, tq $x_0 = \tilde{x}_0$, $x_1 = \tilde{x}_1$.
Então $T(x_n) = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1)$ e T é sobre.
Finalmente, é imediato que T é linear, logo é isomorfismo. $\square$

Exercício 14)

Suponha que T' está bem definida.
Então dado $v \in V$, uma vez que $v + w + W = v + W$ $\forall w \in W$, temos que
$$T(v) + W = T(v + W) = T(v + w + W) =$$
$$= T(v + w) + W$$
$$= T(v) + T(w) + W$$
Isto é, $T(v) + W = T(v) + T(w) + W \implies$
$\implies T(w) \in W$, $\forall w \in W \Rightarrow T(W) \subset W$
Em particular, $W \subset \ker(T')$ e
$$T'(v + W) = 0 + W \iff T(v) + W = 0 + W$$
$$\iff T(v) \in W, \text{ logo}$$

$\ker T' = T^{-1}(W)/W$

Finalmente, $Im(T') = ImT/W$

Exercício 15)

a) De fato a sequência é exata se e só se $\ker T_1 = Im T_0$.

Mas $T_0 : 0 \to V_1$ é a aplicação 0, logo $Im T_0 = \{0\}$ e segue que $\ker T_1 = \{0\} \Leftrightarrow T_1$ é injetora

b) De fato, note que $T_1 : V_1 \to 0$ é dada por $T_1(x) = 0$, $\forall x \in V_1 \Leftrightarrow \ker T_1 = V_1$

Logo a seq. é exata se e só se $V_1 = \ker T_1 = Im T_0$, isto é, T_0 é sobre

c) De fato, pelo teorema do núcleo e da imagem aplicado a T_1, T_2 e T_3 temos:

$d_1 = \dim \ker T_1 + \dim Im T_1$, $d_2 = \dim \ker T_2 + \dim Im T_2$

$d_3 = \dim \ker T_3 + \dim Im T_3$

Além disso, $\ker T_1 = \{0\}$ e $Im T_3 = V_4$ por (a) e (b), logo

$$d_1 = \dim Im T_1,$$
$$d_2 = \dim Im T_1 + \dim \ker T_3$$
$$d_3 = \dim \ker T_3 + d_4$$

Logo $d_1 + d_3 = \dim Im T_1 + \dim \ker T_3 + d_4 =$

$= d_2 + d_4$.

Exercício 16)

a) De fato, seja $v = d_i(u) \in \mathrm{Im}(d_i)$. Então

$$0 = d_{i+1}(d_i(u)) \Rightarrow d_i(u) \in \ker(d_{i+1})$$

b) Se $k \in \{m, \dots, n\}$, então

$$\dim(H^k(C,d)) = \dim \ker d_i - \dim \mathrm{Im}\, d_{i-1}$$

Logo

$$\chi(C,d) = \sum (-1)^k \dim(H^k(C,d))$$

$$= \sum (-1)^k (\dim \ker d_k - \dim \mathrm{Im}\, d_{k-1})$$

$$= (-1)^m \dim \ker d_m + (-1)^{m+1} \dim \ker d_{m+1} - (-1)^{m+1} \dim \mathrm{Im}\, d_m + \dots + (-1)^n \dim \mathrm{Im}\, d_n$$

$$= 0 + (-1)^k \dim \ker d_k + (-1)^k \dim \mathrm{Im}\, d_k + \dots + 0$$

$$= \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \dim(C_k)$$

— [?] —

Prova-se por indução em $\#\{m, \dots, n\}$. Se $\#\{m, \dots, n\} = 1$, então $C_i = \{0\}$, $\forall i \neq m$

Assim $d: C_i \to C_{i+1}$ é a aplicação nula, p/ todo i e logo $\ker d_i = C_i$, $\forall i$, logo é imediata.

Suponha que vale p/ $\#\{m, \dots, n\} = l$.

Então se $\#\{m, \dots, n\} = l+1$

A menos de reordenação, podemos supor $\{m, \dots, n\} = \{1, 2, \dots, l+1\}$. Assim, se $j \notin \{1, 2, \dots, l+1\}$, $C_j = 0 \Rightarrow \partial_0 = 0$ e que $\partial_{l+1} = 0 \therefore \operatorname{Im} \partial_0 = \{0\}$ e $\ker \partial_{l+1} = C_{l+1}$

Além disso $\partial_i = 0$, $\forall i \notin \{1, 2, \dots, l+1\}$, logo

$$\sum_{k=1}^{l+1} (-1)^k (\dim \ker \partial_k - \dim \operatorname{Im} \partial_{k-1})$$

$$= (-1) \dim \ker \partial_1 + \sum_{k=2}^{l} (-1)^k (\dim \ker \partial_k - \dim \operatorname{Im} \partial_{k-1})$$

$$+ (-1)^{l+1} \dim (C_{l+1}) - (-1)^{l+1} \dim \operatorname{Im} \partial_l$$

$$= (-1) \dim \ker \partial_1 + \sum_{k=2}^{l} (-1)^k \dim \ker \partial_k +$$
$$+ \sum_{2}^{l} (-1)^{k-1} \dim \operatorname{Im} \partial_{k-1} + (-1)^l \dim \operatorname{Im} \partial_l +$$
$$+ (-1)^{l+1} \dim (C_{l+1})$$

$$= \sum_{k=2}^{l} (-1)^{k-1} \dim \ker \partial_k + \sum_{k=1}^{l-1} (-1)^k \dim \operatorname{Im} \partial_k$$

$$= \sum_{k=2}^{l-1} (-1)^k (\dim \ker \partial_k + \dim \operatorname{Im} \partial_k)$$

$$+ (-1) \dim C_1 + \dim C_{l+1} = \sum (-1)^k \dim C_k$$

Exercício 17

De fato, seja $[T]_{\mathcal{B}}$ a matriz de T em rel. a uma base $\mathcal{B}$ de V, $[G]_{\mathcal{B}}$ a matriz de G. Então $T \circ G = Id_V \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}} \cdot [G]_{\mathcal{B}} = [T \circ G]_{\mathcal{B}} = [Id_V]_{\mathcal{B}}$, logo $[G]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$ e logo T é isomorfismo.

Não vale em dimensão infinita: seja $C_0(\mathbb{R})$ o espaço das sequências de reais com um número finito de termos não nulos. Considere

$$G : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$
$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

Então claramente G é linear e se

$$T : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$$
$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (x_{n-1})_{n=1}^{\infty} = (x_2, x_3, \dots)$$

Então temos que $T \circ G = Id_{C_0}$, mas T não é isomorfismo. De fato, T não é injetiva, pois $T((1,0,0,\dots)) = (0,0,\dots)$, i.e.: $\ker T \ni (1,0,0,0,\dots)$

Exercício 18)

De fato, seja $T: U \to V$ linear.

Defina

$$H: U/\ker(T) \longrightarrow Im(T)$$
$$u + \ker(T) \longmapsto T(u)$$

Primeiro, verifiquemos que H está bem definida:

De fato, sejam $u, v \in U$ tq $u + \ker T = v + \ker T$

Então $(u - v) \in \ker T$ e logo $T(u-v) = 0 \iff$

$T(u) - T(v) = 0 \iff T(u) = T(v)$.

Logo

$$H(u + \ker T) = T(u) = T(v) = H(v + \ker T)$$

e portanto H está bem definida.

Note que H é linear, pois se $u + \ker T$, $v + \ker T \in$
$\in U/\ker T$, então

$$H(u + \ker T + v + \ker T) = H((u+v) + \ker T)$$
$$= T(u+v) = T(u) + T(v)$$
$$= H(u + \ker T) + H(v + \ker T)$$

$$H(\lambda(u + \ker T)) = H(\lambda u + \ker T) = T(\lambda u) = \lambda T(u)$$
$$= \lambda H(u + \ker T)$$

Finalmente, note que H é injetiva, pois

$$H(u + \ker T) = H(v + \ker T) \Rightarrow T(u) = T(v)$$
$$\Rightarrow T(u-v) = 0$$

$\Rightarrow u - v \in \ker T \Rightarrow u + \ker T = v + \ker T$

E é sobrejetiva, pois se $v = T(u) \in \mathrm{Im}\, T$, então $H(u + \ker T) = T(u) = v$ $\square$

Exercício 19)

Seja $Y \subset W$ subespaço. Afirmo que $T^{-1}(Y) \subset V$ é subespaço. De fato, dados $u, v \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(u), T(v) \in Y \Rightarrow \lambda T(u) + T(v) \in Y \Rightarrow T(\lambda u + v) \in Y \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda u + v \in T^{-1}(Y)$

Assim, considere

$$\phi : \{\text{subespaços de } W\} \to \left\{ \begin{array}{c} \text{subespaços de } V \text{ contendo} \\ \ker T \end{array} \right\}$$
$$Y \longmapsto T^{-1}(Y)$$

Vejamos que ϕ é bijeção.

De fato, $\phi(X) = \phi(Y) \Rightarrow T^{-1}(Y) = T^{-1}(X) \Rightarrow$
$\Rightarrow X = Y$.

Ainda: dado $X \subset V$ subespaço contendo $\ker(T)$ e seja $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ base de X com $\{u_1, \dots, u_n\}$ base de $\ker(T)$. Então $\{T(v_1), \dots, T(v_m)\}$ é base de $T(X) \subset W$ e logo $\phi(T(X)) = X$

Exercício 20

De fato, seja $u \in U$ tal que $T(u) = 0$, isto é, $T(u) = 0 + W$. Então

$$u + W = T(u) = 0 + W \Rightarrow u \in W \Rightarrow u \in U \cap W$$

Mas $U \oplus W \Rightarrow u = 0$, logo T é injetiva.

Agora, dado $v + W \in V/W$, sejam $u \in U, w \in W$ tais que $v = u + w$.

Então $u = v - w \in U$ e assim

$$T(u) = u + W = (u + w) + W = v + W$$

Logo T é sobrejetora $\square$

Exercício 21)

a) Defina $T : \dfrac{W + U}{U} \longrightarrow \dfrac{W}{W \cap U}$

$$(u + w) + U \longmapsto w + (W \cap U)$$

Vejamos que T está bem definida. De fato, suponha que $(u_1 + w_1) + U = (u_2 + w_2) + U$, onde $u_i \in U, w_i \in W$

Então $u_1 + w_1 - u_2 - w_2 \in U \Rightarrow w_1 - w_2 \in U$.

Mas $w_1 - w_2 \in W \therefore w_1 - w_2 \in W \cap U$

Mas então

$$T(u_1 + w_1 + U) = w_1 + (W \cap U) = w_2 + (W \cap U) = T(u_2 + w_2 + U)$$

Note que T é linear, pois

$T((u_1+w_1+U)+(u_2+w_2+U)) = T((u_1+u_2+w_1+w_2)+U$
$= w_1+w_2+W\cap U$
$= w_1+W\cap U + w_2 + W\cap U$
$= T(u_1+w_1+U) + T(u_2+w_2+U)$

$T(\lambda(u_1+w_1+U)) = T(\lambda u_1+\lambda w_1)+U) = \lambda w_1 + W\cap U$
$= \lambda(w_1+W\cap U) = \lambda T(u_1+w_1+U)$

Note que
$T(u+w+U) = 0 + W\cap U \Leftrightarrow w+W\cap U = 0+W\cap U$
$\Leftrightarrow w\in W\cap U$

Mas $u\in U$, $w\in W\cap U \Rightarrow u+w\in U \Rightarrow u+w+U = 0+U$,
logo $\ker T = \{0\}$

Finalmente, dado $w+W\cap U \in W/_{W\cap U}$, temos que p/ qualquer $u\in U$,
$T(u+w+U) = w+W\cap U$

$\therefore$ T é sobrejetora $\square$

b) Seja $T: V/_W \longrightarrow V/_U$, $T(v+W) = v+U$

Então T está bem definida, pois $v+W = u+W \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow v-u\in W \Rightarrow v-u\in U \Rightarrow T(v+W) = v+U = u+U = T(u+W)$

Note que T é sobrejetora e que
$T(v+W) = 0+U \Leftrightarrow v+U = 0+U \Leftrightarrow v\in U$
$\Leftrightarrow v+W \in U/_W \Leftrightarrow \ker T = U/_W$

Logo pelo 1º teorema do isomorfismo segue $\square$

Exercício 22)

AF: $T: \mathbb{R}^n / \mathbb{R} \times \{(0,0,\dots,0)\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$

$$\overline{(x_1,\dots,x_n)} \longmapsto (x_2,\dots,x_n)$$

Note que T está bem definida, pois $\overline{(x_1,\dots,x_n)} = \overline{(y_1,\dots,y_n)} \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n)-(y_1,\dots,y_n) \in$ $\in \mathbb{R}\times\{(0,\dots,0)\} \Longleftrightarrow x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$, logo $T(\overline{(x_1,\dots,x_n)}) = (x_2,\dots,x_n) = (y_2,\dots,y_n) = T(\overline{(y_1,\dots,y_n)})$

Note que $T(\overline{(x_1,\dots,x_n)}) = (0,\dots,0) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}\times\{(0,\dots,0)\}$ e $\overline{(x_1,\dots,x_n)} = \bar{0}$ $\therefore$ T é injetiva

Finalmente, se $(a_2,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, então $T(\overline{(0,a_2,\dots,a_n)}) = (a_2,\dots,a_n)$ $\therefore$ T é sobre $\square$

Exercício 23

a) Defina $T: W \to \mathbb{R}$

$$\phi \longmapsto \phi(x)$$

b) Defina $T: V/W \longrightarrow \{\varphi \in \mathcal{C}[a,b] \,;\, \varphi(a)=0\}$

$$\phi + W \longmapsto \phi - \phi(a)$$

É fácil ver que T é isomorfismo onde

$$\left(\begin{array}{l} \phi(a): [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\quad x \longmapsto \phi(a) \end{array} \right)$$

Exercício 24)

Fixadas as bases $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_m\}$, seja

$A = (a_{ij})_{i,j} = A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Defina $T: U \to V$, pondo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{m1} & \cdots \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \,, \; j = 1, \dots, n$$

Então afirmo que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = A$

De fato, é imediato da definição.

Exercício 25)

a) De fato, seja a $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = A = (a_{ij})$, $[G]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = B = (b_{ij})$.

Assim
$$T(u_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \quad , \forall j = 1, \dots n$$
$$G(u_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i, \quad \forall j = 1, \dots n$$

onde $\mathcal{B}' = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Então
$$(T+G)(u_j) = T(u_j) + G(u_j)$$
$$= \sum a_{ij} v_i + \sum b_{ij} v_i$$
$$= \sum (a_{ij} + b_{ij}) v_i$$

$\therefore \quad [T+G]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = A + B$

b) Se $\alpha \in \mathbb{K}$, então
$$(\alpha T)(u_j) = \alpha \cdot \sum a_{ij} v_i$$
$$= \sum (\alpha a_{ij}) v_i$$

$\therefore$

$$[\alpha \cdot T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \alpha \cdot A$$

Exercício 26)

Suponha que $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$.
Seja $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$.
Então $\exists\, a_{ij}, b_{ij}$,

$$S(u_j) = \sum a_{ij} u_i$$

$$T(u_j) = \sum b_{ij} u_i$$

$$T(v_j) = \sum a_{ij} v_i$$

Assim, se $[Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é a matriz de mudança de base, temos

$$[Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} (u_j) = [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} v_j$$

$$= [Id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \sum a_{ij} v_i$$

$$= \sum a_{ij} u_i$$

Logo $S = Id_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot T \, Id_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

Exercício 27

Note que

$$T(1) = 0 + 0(1+x) + \cdots + 0(1+x^n)$$

$$T(1+x) = 1 = 1\cdot 1 + 0(1+x) + 0 \cdots + 0$$

$$T(1+x^2) = 2x = -2\cdot 1 + 2\cdot(1+x) + 0 + \cdots + 0$$

$$\vdots$$

$$T(1+x^n) = n x^{n-1} = -n\cdot 1 + 0 \cdots + 0 + n(1+x^{n-1}) + 0\cdot(1+x^n)$$

Logo

$$T((1,0,\dots,0)) = (0,\dots,0)$$

$$T((0,1,\dots,0)) = (1,\dots,0)$$

$$T((0,0,1,\dots,0)) = (-2,2,0,\dots,0)$$

$$T((0,0,\dots,1)) = (-n,0,\dots,n,0)$$

Logo

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & \cdots & -n \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 28)

a) Seja a base canônica do $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Então

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,1,0,0)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,1,0)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0,0,-1,0)$$

Logo $[T]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Notique

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = +1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, -1, 0)_{\mathcal{B}}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}}$$

Logo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M é a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base canônica, isto é, é a matriz M tal que

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Exercício 29)

a) De fato, suponha por absurdo que sim. Então

$$n = tr(Id) = tr(AB - BA) = tr(AB) - tr(BA)$$
$$= 0 \rightarrow\leftarrow$$

b) Se existissem, então dadas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ para U e V, teríamos que as matrizes de T e G satisfariam $AB - BA = Id$ $\rightarrow\leftarrow$

c) Seja $V = C^\infty(\mathbb{R})$, $T: V \to V$, $T(f(x)) = x f(x)$
$G: V \to V$, $G(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x)$

Então é fácil ver que T e G são lineares e ainda:

$$(GT - TG)(f(x)) = G(T(f(x))) - T(G(f(x)))$$
$$= G(x f(x)) - T\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)$$
$$= \frac{d}{dx} x f(x) - x \frac{d}{dx} f(x)$$
$$= x \frac{d}{dx} f(x) + f(x) - x \frac{d}{dx} f(x)$$
$$= f(x)$$

$\therefore GT - TG = Id$

Exercício 30)

a) De fato, T é a transf. linear de matriz

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Suponha que $\exists\, u = (a, b, c)_{\mathcal{B}}$ tal que $Tu = u$. Então $u = a + b(x+x^2) + c(1+x^2)$

$$= a+c + bx + (b+c)x^2$$

$$= (a+c, b, (b+c))_{\mathcal{C}}$$

Então

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b \\ b+c \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -2b + 2c = a + c \\ a + c = b \\ a + b + c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Logo $\nexists\, u \neq 0$. □

Exercício 31

a) Seja $\pi : V \to V$ projeção e $W_1 \subset V$ tal que $W_1 = Im(\pi)$; $W_2 = Ker(\pi)$.
Então se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de W_1, $\{v_1, \dots, v_m\}$ de W_2, $\{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m\}$ é base de V e $\mathcal{B} = \{u_1, \dots v_m\}$

$$[\pi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Suponha $T(Im(\pi)) \subset Im(\pi)$ e $T(ker(\pi)) \subset ker(\pi)$.
Então dado $v = u + w$, $u \in Im\,\pi$, $w \in ker\,\pi$, temos

$$T(\pi(v)) = T(\pi(u+w))$$
$$= T(u)$$

Enquanto $\pi(T(v)) = \pi(T(u) + T(w))$
$$= T(u)$$

Pois $\pi(T(w)) = 0$ e $\pi(v) = v$, $\forall v \in Im(\pi)$

Suponha agora que $T(\pi(v)) = \pi(T(v))$, $\forall v \in V$. Então se $v \in ker(\pi)$, temos

$$\pi(T(v)) = T(\pi(v)) = T(0) = 0$$

Logo $T(v) \in ker\,\pi \therefore T(ker\,\pi) \subset ker\,\pi$

e, se $v \in Im(\pi)$, $\pi(v) = v$. Logo
$$\pi(T(v)) = T(\pi(v)) = T(v)$$
Logo $T(v) \in Im(\pi)$ $\therefore$ $T(Im\,\pi) \subset Im\,\pi$.

c) Suponha $\pi \circ \tau = \tau \circ \pi = 0$. Então dado $v \in V$,
$$(\pi+\tau)\circ(\pi+\tau)(v) = (\pi+\tau)(\pi(v)+\tau(v))$$
$$= \pi(\pi(v)) + \cancel{\pi(\tau(v))} +$$
$$+ \cancel{\tau(\pi(v))} + \tau(\tau(v))$$
$$= \pi(v) + \tau(v)$$
$$= (\pi+\tau)(v)$$
Logo $\pi+\tau$ é projeção.
Reciprocamente, suponha $\pi+\tau$ projeção.
Então dado $v \in \ker \pi$, temos
$$(\pi+\tau)^2(v) = \pi(\pi(v)) + \pi(\tau(v)) + \tau(\pi(v)) + \tau(\tau(v))$$
$$= \pi(\tau(v)) + \tau(v) = (\pi+\tau)(v) = \tau(v)$$
Logo $\pi(\tau(v)) = 0$
Reciprocamente, se $v \in \ker \tau$, então
$$(\pi+\tau)^2(v) = (\pi+\tau)(v) \Rightarrow \pi(v) = \pi(v) + \tau(\pi(v))$$
$$\Rightarrow \tau(\pi(v)) = 0$$
Agora, se $v \in Im(\pi)$, então $\pi(v) = v$ e logo
$$(\pi+\tau)^2(v) = (\pi+\tau)(v) \Leftrightarrow$$
$$v + \pi(\tau(v)) + \tau(v) + \tau(\tau(v)) = v + \tau(v)$$
e $\Updownarrow$

$$v + \pi(\tau(v)) + 2\tau(v) = v + \tau(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$2\tau(v) = 0 \Leftrightarrow \tau(v) = 0$$

Pois $\tau(v) \in Im(\pi)$, por (b)

Reciprocamente, se $v \in Im(\tau) \Rightarrow \pi(v) \in Im(\tau)$ e

$$\pi(\pi(v)) + \tau(\pi(v)) + \pi(\tau(v)) + \tau(\tau(v)) = \pi(v) + \tau(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$\pi(v) + \tau(\pi(v)) + \cancel{\pi(v)} + \cancel{v} = \cancel{\pi(v)} + \cancel{v}$$

$$2\pi(v) = 0 \Rightarrow \pi(v) = 0$$

Logo $\pi(\tau(v)) = \tau(\pi(v)) = 0$, $\forall v \in V$

Pois $V = \ker \pi \oplus Im(\pi) = \ker \tau \oplus Im \tau$

d) Seja $v \in \ker(\pi) \cap \ker(\tau)$. Então claramente $(\pi + \tau)(v) = 0 \therefore \ker(\pi + \tau) \subset \ker(\pi) \cap \ker(\tau)$

Reciprocamente, suponha $(\pi + \tau)(v) = 0$.

Então $\pi(v) + \tau(v) = 0 \Leftrightarrow \pi(v) = -\tau(v)$

Logo $\pi(v) \in Im(\tau)$ e $\tau(\pi(v)) = \pi(v)$

Mas $\tau(\pi(v)) = 0$, por (c), logo $\pi(v) = 0$

isto é, $v \in \ker(\pi)$. Do mesmo modo, $-\tau(v) \in$
$\in Im(\pi)$, donde conclui-se que $\tau(v) = 0$
e logo $v \in \ker(\pi) \cap \ker(\tau)$

Suponha agora que $v = u + w \in Im(\pi) + Im(\tau)$
Então

$$(\pi+\tau)(v) = (\pi+\tau)(u+w) \overset{*}{=} \cancel{u} + \pi(w) + \tau(u) + \cancel{w}$$

Por outro lado

$$(\pi+\tau)(v) = (\pi+\tau)^2(v) = u + \pi(w) + \cancel{\pi(\tau(u))} + \pi(w)$$
$$+ \tau(u) + \cancel{\tau(\pi(w))} + \tau(u) + w$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi(w) = 2\tau(u) \iff \pi(w) = \tau(u)$$

$\Rightarrow \pi(w) + \tau(u) = 0$, pois $\pi(w) = \tau(u) \in Im\,\pi \cap Im\,\tau$

e logo $\pi(w) = \pi(\tau(u')) = 0$

e $\tau(u) = \tau(\pi(v')) = 0$

Logo $(\pi+\tau)(u+w) \overset{*}{=} u+w$ e $u+w = v \in Im(\pi+\tau)$

Reciprocamente, se $v \in Im(\pi+\tau)$, seja $v = u+w$, $u \in Im\,\pi$, $w \in Ker\,\pi$.

Então

$$(\pi+\tau)(u+w) = u+w$$

$$\Updownarrow$$

$$u + 0 + \tau(u) + \tau(w) = u + w$$

Mas $u \in Im\,\pi \Rightarrow u = \pi(u) \Rightarrow \tau(u) = \tau(\pi(u)) = 0$

Logo

$$u + \tau(w) = u + w \Rightarrow \tau(w) = w$$

e portanto $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$$u + w \in Im\,\pi \oplus Im\,\tau \qquad\qquad w \in Im\,\tau$$

Exercício 32)

Para cada $v \in V$, escreva $v = v_1 + \dots + v_r$, com $v_i \in V_i$, $\forall i = 1, \dots, r$, e defina

$$\pi_i : V \longrightarrow V$$
$$v = v_1 + \dots + v_r \longmapsto v_i$$

Então é claro que π_i está bem definida e é linear. Ainda:

$$\pi_i(\pi_i(v)) = \pi_i(v_i) = \pi_i(0 + \dots + v_i + \dots 0)$$
$$= v_i$$

Logo cada π_i é projeção. Ainda:

$$\pi_j(\pi_i(v)) = \pi_j(v_i) = \pi_j(0 + \dots + v_i + \dots + \underset{j\text{-ésima}}{0} + \dots + 0)$$
$$= 0 \quad , \text{se } i \neq j$$

Claramente

$$\sum \pi_i(v) = \sum v_i = v = Id(v)$$

e ainda se $v_i \in V_i$, então

$$\pi_i(v_i) = \pi_i(0 + \dots + v_i + \dots + 0) = v_i$$

$\therefore V_i \subset Im(\pi_i)$ e a inclusão reversa vem da definição de π_i $\blacksquare$

Exercício 33

a) Sejam $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de U e V, resp. defina

$$\Phi : \mathcal{L}(U,V) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K})$$
$$T \longmapsto [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Então Φ é isomorfismo.

b) Segue que $\mathcal{L}(U,V) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(U',V')$, pois $\dim U = \dim U'$, $\dim(V) = \dim(V')$

c) Defina

$$\Phi : V \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, V)$$
$$v \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} \lambda : \mathbb{K} \longrightarrow V \\ \alpha \longmapsto \alpha \cdot v \end{array} \right.$$

Então é fácil ver que Φ é linear e está bem definida.

Ainda: $\Phi(v) = 0 \iff \begin{array}{l} \lambda : \mathbb{K} \to V \\ \alpha \longmapsto \alpha \cdot v \end{array} = 0$

$\iff \alpha \cdot v = 0, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\iff v = 0$

Logo Φ é injetivo e portanto isomorfismo pois $\dim V = \dim 1 \times \dim V = \dim \mathcal{L}(\mathbb{K}, V)$

Exercício 34

$$\mathcal{C} = \{T_{ij}\} = \{T_{ij}(u_k) = v_j\}$$

$$T(a+bx+cx^2) = T(a-b-c, b, c)$$

Exercício 35)

a) Temos

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) De fato, dado $v = \sum \lambda_i v_i$, temos que

$$T^n(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T^n(v_i) = 0$$

Mas

$$T^{n-1}(v_1) = v_n \neq 0$$

c) Se $v \in V$ tal que $G^{n-1}(v) \neq 0$
e defina
$$\{v_i = G^{i-1}(v) \,;\, i = 1, 2, \dots, n\}$$
Então $v_i \neq 0$, $\forall i$, pois c.c. $\Rightarrow G^{n-1}(v) = 0$
Mostraremos que é L.I.
De fato supondo $\lambda_i \in \mathbb{K}$ t.q.
$$\sum \lambda_i v_i = 0$$
Então
$$G^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i\right) = \lambda_1 G^{n-1}(v) = 0$$
$\Rightarrow \lambda_1 = 0$
$$G^{n-2}\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \cancel{\lambda_1}^{0} G^{n-2}(v) + \lambda_2 G^{n-1}(v) = 0$$
$\Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\vdots$

$\Rightarrow \lambda_n = 0$, $\forall n$ $\therefore$ é L.I. e como
$\dim V = n$, segue $\square$

d) De fato, pela parte anterior temos que existem bases nas quais M e N assumem a mesma forma canônica, isto é, existe matriz de mudança de base nas quais

$$P_1^{-1} M \cdot P_1 = A$$
$$P_2^{-2} N \cdot P_2 = A$$

Onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$N = P_2 P_1^{-1} M P_1 P_2^{-1}$$

e $M \sim N$

<u>Exercício 36)</u>

a) Verdadeira: Temos pelo teorema do núcleo e da imagem que

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$$

Como $\dim \ker T \geq 0$, isto implica $\dim \operatorname{Im} T$ menor ou igual a 2, logo $\operatorname{Im} T \subset \mathbb{R}^4$ é subespaço de dimensão no máximo

2. Tomando base para $Im(T)$ e completando a em uma base de $\mathbb{R}^4$, temos que os vetores que não estão em $Im(T)$ são L.I. e ao menos 2.

b) Falsa. Defina

$$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (x,0)$$

Então T é linear: de fato

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

Mas T não é sobrejetora, pois $(0,1) \notin Im(T)$

c) ~~c)~~ Falsa. Defina

$$T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x,y,z,w) \mapsto (x,y,0,0)$$

Então $\ker(T) = \langle (0,0,1,0); (0,0,0,1) \rangle$

$$Im(T) = \langle (1,0,0,0); (0,1,0,0) \rangle$$

$\therefore \dim \ker T = 2 = \dim Im(T)$

d) Falsa, pois suponha que sim.

Então pelo teorema do núcleo e da imagem teríamos

$$5 = \dim \mathbb{R}^5 = \dim \overbrace{\ker T}^{=1} + \dim \operatorname{Im} T$$

$$\Downarrow$$

$$\dim \operatorname{Im} T = 4$$

Mas $\operatorname{Im}(T) \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T \leq 3 \rightarrow\leftarrow$

Exercício 37) $\qquad P x = P - P^2 = 0$

a) Note que dado $v \in V$,

$$(a^2 T - 3aT^2 + T^3)(v) = 0$$

$\Rightarrow$

$$T\left(a^2 v - 3aT(v) + T^2(v)\right) = 0$$

$\therefore$ $a^2 v - 3aT(v) + T^2(v) = \xi \in \ker(T)$ e logo

$$a^2 v - 3aT(v) + T^2(v) = \xi$$

$$\Rightarrow a^2 v = \xi + 3aT(v) + T^2(v)$$

$$v = \underbrace{\tfrac{1}{a^2}\xi}_{\in \ker T} + \underbrace{T(3av + T(v))}_{\in \operatorname{Im}(T)}$$

Logo $V = \ker T + \operatorname{Im} T$

Agora seja $v \in \operatorname{Im}(T) \cap \ker T$.

Como $v \in Im(T)$, $\exists u \in V$, $T(u) = v$

Porém $T(v) = 0$ $\therefore$

$$(a^2 T - 3aT^2 + T^3)(u) = 0$$

$$0 = a^2 v - \cancel{3aT(v)}^{0} + \cancel{T^2(v)}^{0}$$

$$= a^2 v$$

$\therefore v = 0$ e $Im(T) \cap ker(T) = \{0\}$ $\square$

b) De fato, $P(0) = 0 \Rightarrow P(x) = x \cdot Q(x)$, com $Q(x)$ polinômio. $P'(0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q(0) \neq 0$, i.e: 0 é raiz simples de P. Assim dado $v \in V$

$$P(T)v = T \cdot Q(T)v = 0$$

$$= T(Q(T) \cdot v) = 0$$

Logo $Q(T) \cdot v = \xi \in ker(T)$

Ainda: Como $Q(0) = a \in \mathbb{K} \neq 0$, temos que $Q(x) = a + R(x)$, $R(0) = 0$, logo

$$Q(T) \cdot v = \xi \Leftrightarrow (a + R(T)) \cdot v = \xi$$

$$\Leftrightarrow av + R(T) \cdot v = \xi$$

Mas

$$\Leftrightarrow v = \tfrac{1}{a}\xi - R(T) \cdot v$$

Como $R(0) = 0$, temos $R(x) = x S(x)$, p/ algum polinômio S e logo

$$v = \frac{1}{a}\xi - T \cdot S(T) \cdot v$$

$$= \underset{\in ker T}{1/a\,\xi} - \underbrace{T(S(T) \cdot v)}_{\in Im T}$$

e logo $V = \ker T + \operatorname{Im} T$

Agora, se $v \in \operatorname{Im}(T) \cap \ker T$.

Então existe u, $T(u) = v$ e logo

$$
\begin{aligned}
0 = P(T)\cdot u &= T\cdot Q(T)\cdot u \\
&= Q(T)\cdot T\cdot u \\
&= (a + R(T))\cdot T\cdot u \\
&= (a + R(T))\cdot v \\
&= a\cdot v + S(T)\cdot \xcancel{Tv}^{\,0} \\
&= a\cdot v
\end{aligned}
$$

Logo $v = 0$ e $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

<u>Ex 38)</u>

a) De fato, seja $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$, $I \subset \mathbb{N}$ finito um elemento qualquer de V.

Seja

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in P(\mathbb{K})$$

Então

$$
\begin{aligned}
0 = p(T)\cdot v_1 &= a_n T^n v_1 + \dots + a_1 T v_1 + a_0 v_1 \\
&= a_n v_{n+1} + \dots + a_1 v_2 + a_0 v_1
\end{aligned}
$$

Mas $\{v_i\}_{i \in I}$ L.I. $\Rightarrow a_i = 0, \forall i \therefore$ $p(x) = 0$.

b) Pelo item (c), como $\dim \operatorname{Im} T < \infty$, temos que $T' = T|_{\mathrm{Im}T} : \mathrm{Im}\,T \to \mathrm{Im}\,T$ admite polinômio $Q(x) \neq 0$ tal que $Q(T) = 0$ isto é, $Q(T)\cdot v = 0$, $\forall v \in \mathrm{Im}\,T$.

Seja $p(x) = x \cdot Q(x) \neq 0$. Então para $v \in V$,

$$p(T)\cdot v = T \circ Q(T) \cdot v = Q(T)(T(v)) = 0$$

Pois $T(v) \in \mathrm{Im}\,T$, $\forall v \in V$. Segue que $p(x) \in Z(T)$, $p(x) \neq 0 \therefore Z(T) \neq \{0\}$ $\square$

c) Se $\dim V = n < \infty$, então $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$. Então $\{Id, T, T^2, \ldots, T^{n^2-1}, T^{n^2}\}$ tem n^2+1 elementos, logo é L.D., isto é, $\exists \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_0 Id + \alpha_1 T + \dots + \alpha_{n^2} T^{n^2} = 0$$

Tomando $p(x) = \sum \alpha_i x_i$, então $P(T) \cdot v = 0$ $\forall v \in V$ e $p \neq 0$, logo $Z(T) \neq \{0\}$.

Agora suponha que, p/ cada operador linear $T: V \to V$, exista $P_T \neq 0$, $P_T(T) = 0$.

Reciprocamente, suponha que $Z(T) \neq \{0\}$, $\forall T: V \to V$ e que $\dim V = \infty$. Seja $\mathcal{B} = \{v_j\}_{j \in J} \subset V$ base de V. Tome subconjunto enumerável

$$S = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$$

Defina $T: V \to V$ como sendo

$$T(v_l) = \begin{cases} 0, & \text{se } v_l \notin S \\ v_{l+1} & \text{se } v_l \in S \end{cases}$$

Assim $T^k(v_i) = v_{i+k}$, $\forall v_i \in S$.

Por hipótese, existe $p(x) \in Z(T)$, $p(x) \neq 0$.

Seja $p(x) = \sum_1^n \alpha_k x^k$.

Temos que

$$0 = P(T)(v_1) = \alpha_0 v_1 + \dots + \alpha_n v_{n+1}$$

Como $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \in S$ é L.I., temos que $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$ e assim $p(x) = 0$.

$\hookrightarrow \leftarrow$ Logo $\dim V < \infty$