Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada

Lista 3: Funcionais Lineares

Exercício 1. Dado $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas em $[-1,1]$. Quais dos seguintes funcionais são lineares?

a. $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)dx$

b. $f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$

c. $f \mapsto f(0)$

d. $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ com $g(x)$ uma função contínua fixa.

Exercício 2. Seja V um espaço vetorial não nulo e $T : V \to \mathbb{K}$ um funcional linear não nulo. Mostre que:

a. T é sobrejetor. Se $\dim V < \infty$, qual a dimensão de $\ker T$?

b. T é injetor se e somente se $\dim_{\mathbb{K}} V = 1$.

Exercício 3. Mostre que a função $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ é um funcional linear se e somente se existirem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $T(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$.

Exercício 4. Mostre que o funcional traço $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tal que $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ é único no seguinte sentido: Se $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $f(AB) = f(BA)$ para cada $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, então f é um múltiplo escalar da função traço. Se, além disso, $f(I) = n$ então $f = \mathrm{tr}$.

Exercício 5. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ fixo.

a. Mostre que para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, a aplicação $T_A : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ dada por $X \mapsto \mathrm{tr}(AX)$, define um elemento no dual $M_n(\mathbb{K})^*$.

b. Mostre que a aplicação $T : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})^*$ dada por $A \mapsto T_A$ define um isomorfismo de espaços vetoriais.

Exercício 6. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, mostre que:

a. Se $v \in V$ e $f(v) = 0$ para todo $f \in V^*$ então $v = 0$.

b. Se $T \in \mathscr{L}(V,V)$ e W é o subespaço de V dado por $W = \{v \in V : f(T(v)) = 0, \forall f \in V^*\}$ então $W = \ker(T)$.

Exercício 7. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $0 \neq f \in V^*$. Mostre que existe $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$ tal que $V = \ker f \oplus \langle v_0 \rangle$.

Exercício 8. Dado V um espaço vetorial de dimensão n e $W \subseteq V$ um subespaço de dimensão m. Prove que existe um número finito de funcionais $f_1, \dots, f_{n-m} \in V^*$ tais que $W = \{w \in V | f_1(w) = \ldots = f_{n-m}(w) = 0\}$.

Exercício 9. Seja $V = \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$. Em cada caso encontre a base $\mathscr{B}$ para V tal que $\mathscr{B}^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ onde:

a. $f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{dx}$, $f_2(p(x)) = \int_0^2 p(x)\,\mathrm{dx}$ e $f_3(p(x)) = \int_0^{-1} p(x)\,\mathrm{dx}$.

b. $f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,\mathrm{dx}$, $f_2(p(x)) = p'(1)$ e $f_3(p(x)) = p(0)$.

Exercício 10. Sejam $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (0,1,-2)$ e $u_3 = (-1,1,0) \in \mathbb{R}^3$.

a. Seja $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ tal que $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = -1$ e $f(u_3) = 3$. Determine $f(a, b, c)$ onde $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

b. Se $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ é tal que $f(u_1) = f(u_2) = 0$ e $f(u_3) \neq 0$, mostre que $f(2, 3, -1) \neq 0$.

Exercício 11. Sejam $f_1, \ldots, f_m \in (\mathbb{K}^n)^*$. Para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ definimos

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Mostre que T é uma transformação linear de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^m$ e que toda transformação linear de $\mathbb{K}^n$ em $\mathbb{K}^m$ é da forma acima, para certos $f_1, \ldots, f_m$.

Exercício 12. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e sejam $f, g \in V^*$ tais que a função h dada por $h(u) = f(u) \cdot g(u)$, também seja um funcional linear sobre V. Mostre que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercício 13. Seja $W \subseteq (\mathbb{R}^4)^*$ um subespaço formado pelos funcionais $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tais que $\ker f$ contém os vetores $(1, 0, 3, -2)$ e $(0, 1, 3, 0)$. Ache uma base de W.

Exercício 14. Sejam $u, v \in V$ com a seguinte propriedade: "sempre que $T(u) = 0$ então $T(v) = 0$, para $T \in V^*$". Mostre que $v = \alpha u$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercício 15. Seja V um espaço vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$ e $\mathscr{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V. Para cada $i \in I$, defina um funcional linear $v_i^* : V \to \mathbb{K}$ tal que $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

a. Mostre que $\{v_i^*\}_{i \in I}$ é LI.

b. Mostre que $\{v_i^*\}_{i \in I}$ é uma base de V^* se e somente se I for finito.

Exercício 16. Seja $V = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, defina $f_\alpha \in V^*$ dada por $f_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$. Mostre que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ é um conjunto LI em V^*. Conclua que uma base de V^* não é enumerável e logo $V \not\simeq V^*$.

Exercício 17. Mostre que $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ não é isomorfo ao seu dual. (Observe que neste caso não da para usar o mesmo argumento do exercício anterior)

Exercício 18. Sejam $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ números reais diferentes dois a dois. Mostre que existe uma única $(n+1)$-upla $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$p'(0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p(\alpha_k) \quad \text{para todo } p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}).$$

Exercício 19. Encontre as bases duais e biduais de cada uma das seguintes bases de $\mathbb{R}^3$.

a. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

b. $\{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$

Exercício 20. Seja W um subespaço próprio de um espaço vetorial V de dimensão finita e considere $f \in W^*$. Mostre que existe $g \in V^*$ tal que $g(w) = f(w)$ para todo $w \in W$.

Exercício 21. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, H um hiperplano de V e $v_0 \in V$. Chamamos o conjunto

$$v_0 + H = \{v_0 + v \mid v \in H\}$$

de **hiperplano afim** de V. Mostre que se $f \in V^*$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ então $\{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ é um hiperplano afim.

Exercício 22. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que todo subespaço próprio de V é uma interseção finita de hiperplanos de V.

Exercício 23. Seja W o subespaço de $\mathscr{P}(\mathbb{K})$ gerado pelos monômios de grau impar. Mostre que W é uma interseção infinita de hiperplanos de $\mathscr{P}(\mathbb{K})$.

Exercício 24. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $f, g \in V^*$. Prove que se $\ker f = \ker g$ então $\{f, g\}$ é LD em V^*.

Exercício 25. Sejam U, V $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e W um hiperplano de U. Mostre que se $T : U \to V$ for um isomorfismo, então $T(W) = \{u \in V : \exists w \in W \text{ com } T(w) = u\}$ é um hiperplano de V.

Exercício 26. Seja $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. O objetivo deste exercício é mostrar que todo hiperplano de $M_n(\mathbb{K})$ interseta $GL_n(\mathbb{K})$.

Por contradição, considere um hiperplano $H \subseteq M_n(\mathbb{K})$ tal que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$.

a. Seja N uma matriz tal que $N \notin H$, mostre que existe $M \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $I = M + \alpha N$.

b. Deduza que tal hiperplano H contém todas as matrizes nilpotentes.

c. Conclua.

Exercício 27. Dado S um subconjunto de V. Definimos o **anulador** S^0 de S como sendo

$$S^0 = \{f \in V^* | f(u) = 0, \forall u \in S\}$$

Mostre que S^0 é um subespaço vetorial de V^*.

Exercício 28. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $u_1 = (1, 2, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 3, 3, 1)$ e $u_3 = (1, 4, 6, 4, 1)$. Determine uma base de W^0.

Exercício 29. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que

a. $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$

b. $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$

Exercício 30. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Prove que:

a. Se $S \subseteq W$ e ambos são subconjuntos de V então $S^0 \supseteq W^0$.

b. Se $S \subseteq V$é um subconjunto, então $S^0 = \langle S \rangle^0$.

c. Se $S, W \subseteq V$ são subespaços de V então $S = W$ se e somente se $S^0 = W^0$.

d. Se S é um subespaço de V então que $(V/S)^* \simeq S^0$.

Exercício 31. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita, $S \subseteq V$ e $\Phi : V \to V^{**}$ o isomorfismo (definido em sala de aula) que leva $v \mapsto \phi_v$ onde $\phi_v : V^* \to \mathbb{K}$ é dado por $T \mapsto \phi_v(T) = T(v)$. Mostre que S é um conjunto gerador de $\Phi^{-1}\left(\left(S^0\right)^0\right)$.

Exercício 32. Seja V um espaço vetorial arbitrário sobre $\mathbb{K}$. Mostre que a injeção $\Phi : V \hookrightarrow V^{**}$ (veja Exercício anterior) é um isomorfismo se e somente se V tem dimensão finita.

Exercício 33. Seja W o conjunto de todos os vetores $(x_1, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{K}^n$ tais que $x_1 + \ldots + x_n = 0$

a. Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$.

b. Prove que W^0 consiste dos funcionais lineais da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c \sum_{j=1}^{n} x_j$$

c. Mostre que o espaço dual W^* de W pode ser identificado com os funcionais lineares

$$f(x_1, \ldots . x_n) = c_1 x_1 + \ldots . + c_n x_n$$

em $\mathbb{K}^n$ que satisfazem $c_1 + \ldots + c_n = 0$.

Exercício 34. Sejam X um conjunto, $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ o espaço vetorial de todas as funções de X em $\mathbb{K}$. Seja W um subespaço de dimensão n de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. Mostre que existem elementos $x_1,...,x_n \in X$ e funções $f_1,...,f_n \in W$ tais que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ para $i,j = 1,\dots n$.

Exercício 35. Dados V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$. Sejam $f_1,\dots,f_n \in V^*$ um conjunto LI de funcionais lineares em V. Mostre que existe um único vetor $v \in V$ tal que $f_i(v) = \alpha_i$ para $i = 1,\dots,n$.

Exercício 36. Mostre que:

a. Se $T,G \in \mathscr{L}(U,V)$ e $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ então $(\alpha T + \beta G)^t = \alpha T^t + \beta G^t$.

b. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ e $G \in \mathscr{L}(V,W)$ então $(G \circ T)^t = T^t \circ G^t$.

c. ${\mathrm{Id}_{\mathrm{U}}}^t = \mathrm{Id}_{\mathrm{U}^*}$

d. Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ é um isomorfismo, então $T^t \in \mathscr{L}(V^*,U^*)$ também é um isomorfismo e $(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$.

Exercício 37. Seja $\phi \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ definida por $\phi(x,y) = 3x - 2y$. Determine $T^t(\phi)(x,y,z)$, quando $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ é dado por

a. $T(x,y,z) = (x+y, y+z)$

b. $T(x,y,z) = (x+y, 2x-y)$

Exercício 38. Considere $V = \mathscr{P}(\mathbb{R})$ e sejam $a,b \in \mathbb{R}$ e $f \in V^*$ definida por $f(p) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x$. Se $D \in \mathscr{L}(V)$ é o operador derivação, determine $D^t(f)$.

Exercício 39. Mostre que a sequência de espaços de dimensão finita $0 \to U \xrightarrow{T_1} V \xrightarrow{T_2} W \to 0$ é exata se e somente se a sequência $0 \to W^* \xrightarrow{T_2^t} V^* \xrightarrow{T_1^t} U^* \to 0$ é exata.

Exercício 40. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ números reais diferentes dois a dois. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a. existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, $\int_{-1}^1 p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(\alpha_i)$.

b. $\int_{-1}^1 \left(\prod_{k=1}^n (x-\alpha_k)\right)\mathrm{d}x = 0$.

Exercício 41. Seja V um espaço vetorial *real* de dimensão finita, $p,q \in \mathbb{N}^*$ e $\phi_1,\dots,\phi_p,\psi_1,\dots,\psi_q \in V^*$.

a. Mostre que se para todo $v \in V$ $\sum_{i=1}^p (\phi_i(v))^2 = \sum_{j=1}^q (\psi_j(v))^2$ então $\langle \phi_1,\dots,\phi_p \rangle = \langle \psi_1,\dots,\psi_q \rangle$.
Dica: A condição implica que $\cap_{i=1}^p \ker\phi_i = \cap_{j=1}^q \ker\psi_j$.

b. O resultado permaneceria válido se fosse um espaço vetorial complexo?

Exercício 42. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e vamos supor que existe $u \neq 0$ em V tal que $T(u) = \alpha u$. Demonstre que existe um funcional linear não nulo f sobre V tal que $T^t(f) = \alpha f$.

Exercício 43. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e seja Ψ a aplicação de $\mathscr{L}(V)$ em $\mathscr{L}(V^*)$ dada por $\Psi(T) = T^t$. Mostre que Ψ é um isomorfismo.

Exercício 44. Prove (usando transpostas de transformações lineares) que o posto-linha de uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ é igual ao posto-coluna[1] de A.

(Dica: considere $T : M_{n\times 1}(\mathbb{K}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{K})$ a transformação linear tal que $[T]_{\mathrm{Can}}^{\mathrm{Can}} = A$. Mostre que $\mathrm{Im}(T) = \langle \mathrm{Col}_1(A), \mathrm{Col}_2(A), \dots, \mathrm{Col}_n(A) \rangle$.)

[1]Definimos o **posto-linha** (**coluna**) de A como sendo o número máximo de linhas (colunas) LI da matriz.

Exercício 1)

a) Sim

b) Não

c) Sim

d) Sim

Exercício 2)

a) De fato, temos que $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{K}$ é subespaço e $T \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\,T \neq \{0\}$. Logo $\dim \mathrm{Im}\,T \geq 1$. Como $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{K}$, $\dim \mathrm{Im}\,T \leq 1$ e logo $\dim \mathrm{Im}\,T = 1 = \dim \mathbb{K} \Rightarrow \mathrm{Im}\,T = \mathbb{K}$. Se $\dim V = n < \infty$, então $\dim \ker T = n - 1$.

b) De fato, T é injetor se e só se $\ker T = \{0\}$. Mas por (a) $\dim \ker T = n-1 \Rightarrow n = 1$.

Exercício 3)

Claramente, se $T(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, T é funcional linear. Reciprocamente, seja $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ funcional linear e defina

$$\alpha_i \doteq T(e_i)$$

onde $e_i = (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots 0)$

Então se $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x = \sum x_i e_i$

e logo

$$T(x) = \sum x_i T(e_i) = \sum \alpha_i x_i \quad \square$$

Exercício 4)

Seja e_{ij} a matriz $(a_{m,n}) = (\delta_{mn}^{ij})_{m,n}$

Então:

1) Se $i \neq j$, então $e_{ij} = e_{ii} e_{ij} - e_{ij} e_{ii}$

Logo, se f satisfaz a hipótese,

$$f(e_{ij}) = f(e_{ii} e_{ij} - e_{ij} e_{ii}) = 0$$

Além disso,

$$e_{ij} e_{ji} - e_{ji} e_{ij} = e_{ii} - e_{jj}$$

Logo, se $i \neq j$,

$$f(e_{jj}) = f(e_{ii})$$

e portanto

$$f\left(\sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}\right) = \sum a_{ii} f(e_{ii})$$
$$= \lambda \sum a_{ii}$$

Claramente, se $f(Id) = n$, então $f = \sum a_{ii} = tr$

Exercício 5)

a) De fato, vejamos que T_A é funcional linear:

Sejam $M, N \in M_n(K)$, $\lambda \in K$. Então

$$T_A(\lambda M + N) = tr(A(\lambda M + N))$$
$$= tr(\lambda AM + AN)$$
$$= tr(\lambda AM) + tr(AN)$$
$$= \lambda\, tr(AM) + T_A(N)$$
$$= \lambda T_A(M) + T_A(N)$$

b) De fato, vejamos que T é injetora.
Suponha $A \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $T_A \equiv 0$ isto é, $T_A(B) = tr(AB) = 0$, $\forall B \in M_n(\mathbb{K})$.
Note que, se $B = e_{ij}$, então $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_{kj}$, logo $tr(Ae_{ij}) = a_{ji}$ e logo, $tr(Ae_{ij}) = 0$, $\forall ij \Rightarrow A = (a_{ij}) = 0$, logo T é injetora.
Como $\dim M_n(\mathbb{K})^* = \dim M_n(\mathbb{K})$, segue que T é isomorfismo.

Exercício 6)

a)

De fato, seja $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ base de V e $\{f_i\}_{i \in I}$ seu conjunto dual em V^*.
Suponha

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{i_j} \quad , i_j \in I, \forall j = 1, \dots, n$$

Então, $\forall j = 1, \dots, n$

$$0 = f_{i_j}(v) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_{i_j}(v_{i_k})$$

$$= \alpha_j$$

Logo $v = 0$.

b) De fato, suponha $w \in W$. Como $f(T(w)) = 0$, $\forall f \in V^*$, por (a) temos que $T(w) = 0$

isto é, $w \in \ker T$. A recíproca é imediata.

Exercício 7)

De fato, como $0 \neq f$, $\exists v_0 \in V$, $f(v_0) \neq 0$.
Dado $v \in V$, defina

$$u = v - \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0$$

Então $u \in \ker f$ e $v = u + \frac{f(v)}{f(v_0)} v_0$, logo $v \in \ker f \oplus \langle v_0 \rangle$

Exercício 8)

Seja $W \subset V$ subespaço de dimensão m.
Pelo que foi visto em sala, $\dim W^0 = n-m$, logo, se $\{f_1, \ldots, f_{n-m}\}$ é base de W^0, temos que $f_i(w) = 0$, $\forall w \in W$, $i = 1, \ldots, n-m$ e se $f_i(w) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n-m$, então $w \in W$.
De fato, se $\{v_1, \ldots, v_{n-m}, u_1, \ldots, u_m\}$ é base de V tal que $\{v_1, \ldots, v_{n-m}\}$ é dual de $\{f_1, \ldots, f_{n-m}\}$
Então $f_i(w) = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n-m \Rightarrow$ se $w = \sum \alpha_i v_i + \sum \beta_j u_j$, então $\alpha_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n-m$ e logo $w = \sum \beta_j u_j \in W$.

Exercício 9)

a) Temos que se $\{p_1, p_2, p_3\}$ é dual de $\{f_1, f_2, f_3\}$ então

$\circ)\ f_1(p_1(x)) = 1 \Rightarrow \int_0^1 p_1(x) = 1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a/3 + b/2 + c = 1 \\ \frac{8a}{3} + 2b + 2c = 0 \\ -a/3 + b/2 - c = 0 \end{array}\right.$

$f_2(p_1(x)) = 0 \Rightarrow \int_0^2 p_1(x) = 0 \Uparrow$

$f_3(p_1(x)) = 0 \Rightarrow \int_0^{-1} p(x) = 0$

Assim, se $p_1(x) = ax^2 + bx + c$

$\Rightarrow b = 1$, etc...

Exercício 10) OK

Exercício 12)

Af: $h \equiv 0$.

De fato, seja $\lambda \neq 0, 1$ e $u \in V$. Então

$$\lambda h(u) = h(\lambda u) = f(\lambda u) g(\lambda u)$$
$$= \lambda^2 f(u) g(u) = \lambda^2 h(u)$$

Logo, se $h(u) \neq 0$, então $\lambda = \lambda^2$ ~~$\Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$~~

$\Rightarrow\!\!\Leftarrow$ Logo $h(u) = 0, \forall u \in V$

Além disso

$$0 = h(u+v) = f(u+v)\, g(u+v)$$
$$= f(u)g(u) + f(u)g(v) + f(v)g(u) + f(v)g(v)$$
$$= h(u) + f(u)g(v) + f(v)g(u) + h(v)$$
$$= f(u)g(v) + f(v)g(u)$$

Assim que, se $f(u) \neq 0$, então $g(u) = 0$ e

~~$\exists u \neq 0$~~ $g(v) = \frac{-f(v)}{f(u)} g(u) = 0$

$\forall v \in V \therefore g \equiv 0$.

14) Seja $u \cup \{v_i\}_{i\in I}$ base de V e seja $\{u^*\} \cup \{g_i\}_{i\in I}$ seu conjunto dual.
Se $v = \lambda u + \sum_j \alpha_j v_{i_j}$, então, como $g_{i_j}(u) = 0$, $\forall j = 1, \dots n$,
Temos
$$0 = g_{i_j}(v) = \alpha_j$$
$\forall j = 1, \dots, n$. Em particular, $v = \lambda u$ $\blacksquare$

13) OK

15)
a) De fato sejam $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ tais que
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}^* = 0$$
Então, p/ cada $k = 1, \dots, n$,
$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}^*\right)(v_{i_k}) = \sum \lambda_j \delta_{jk}$$
$$= \lambda_k$$
Logo $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ e $\{v_i^*\}_{i\in I}$ é L.I.
$\rightarrow$ Suponha I finito.
b) Basta mostrar que $\{v_i^*\}$ gera V^*

De fato, seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $f \in V^*$.
Defina $\lambda_j = f(v_j)$, $j = 1, \dots, n$.
Então p/ todo $v \in V$, $v = \sum \alpha_j v_j$, temos

$$f(v) = f\left(\sum \alpha_j v_j\right) = \sum \alpha_j f(v_j)$$
$$= \sum \alpha_j \lambda_j$$
$$= \sum \alpha_j \lambda_j$$
$$= \sum \lambda_j v_j^*(v)$$

Logo $f = \sum \lambda_j v_j^*$ ☐

Agora, se I é infinito, separe $I = J \cup K$, onde tanto J como K são infinitos.
Defina

$$f(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in J \\ 0, & \text{se } i \in K \end{cases}$$

Então claramente $f \notin \operatorname{span}\{v_i^*\}$, pois suponha que

$$f = \sum_{j=1}^{n} v_{i_j}^*$$

Tome i tal que $i \in J$, $i \neq i_j$, $j = 1, \dots n$.
Então

$$(1) = f(v_i) = \sum v_{i_j}^*(v_i) = 0 \to\leftarrow$$

Logo $\{v_i^*\}_{i \in I}$ não é base de V^*.

Exercício 16)

De fato, seja $\lambda_j \in \mathbb{R}$, tais que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{\alpha_j} = 0$

Então, p/ cada $k = 1, \dots, n$

Seja

$$P_k = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (x - \alpha_i)\right) \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}} (\alpha_k - \alpha_i)}$$

Assim

$$0 = \sum \lambda_j f_{\alpha_j}(P_k(x)) = \sum \lambda_j P_k(\alpha_j)$$

$$= 0 + \dots + 0 + \lambda_k \frac{\prod (\alpha_k - \alpha_i)}{\prod (\alpha_k - \alpha_i}$$

$$= \lambda_k$$

Logo $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ é L.I. e logo uma base de V^* é não enumerável e logo $V \not\cong V^*$.

Exercício 17)

Provemos que $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \not\cong (\mathcal{P}(\mathbb{Q}))^*$ mostrando que $\mathcal{P}(\mathbb{Q})^*$ é não enumerável, enquanto $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ o é.

De fato, que $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ é enumerável é evidente.

Agora, seja $\mathbb{Q}^\infty$ o conjunto das sequências em $\mathbb{Q}$ e defina

$$\mu : \mathbb{Q}^\infty \longrightarrow (\mathcal{P}(\mathbb{Q}))^*$$

por

$$(q_i) \longmapsto f : \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\sum \lambda_i x^i \mapsto \sum \lambda_i q_i$$

Então μ está bem definida, pois, p/ cada $p = \sum \lambda_i x^i \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\lambda_i \neq 0$, p/ um número finito de $i \in \mathbb{N}$, logo $\sum \lambda_i q_i$ é finita, p/ todo p. Além disso, é fácil ver que f é linear. Finalmente, se $\mu(q_i) = \mu(m_i)$, então para $p = x^j \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, temos

$$\mu(q_i)(p) = \sum \delta_i^j q_i = q_j = \mu(m_i)(p) = m_j$$

p/ todo $j \in \mathbb{N}$, logo $(q_i) = (m_i)$ e μ é injeção. Como $|\mathbb{Q}^\infty|$ é não enumerável, segue. □

Exercício 18)

Note que, pelo exercício 16, temos que os funcionais $f_{\alpha_j} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f_{\alpha_j}(p) = p(\alpha_j)$ são L.I. e logo $\{f_{\alpha_0}, \ldots, f_{\alpha_n}\}$ é conjunto L.I. de $n+1$ elementos em $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}))^*$ e logo é base deste. Note que a função $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = p'(0)$ é funcional linear logo $f \in (\mathcal{P}_n(\mathbb{R}))^*$ e portanto $\exists \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(p) = p'(0) = \sum \lambda_j \, p(\alpha_j) = \sum \lambda_j f_{\alpha_j}(p) \quad \blacksquare$$

Ex 19)

a) $\delta_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\delta_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\delta_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x,y,z) \mapsto x$ $\quad (x,y,z) \mapsto y$ $\quad (x,y,z) \mapsto z$

é base de $(\mathbb{R}^3)^*$

$v_1 : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}$, $v_2 : \mathbb{R}^{3*} \to \mathbb{R}$, $v_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f \mapsto f(1,0,0)$, $\quad f \mapsto f(0,1,0)$, $\quad f \mapsto f(0,0,1)$

$\delta_1(x,y,z) = ax + by + cz$

b) $\delta_1(1,-2,3) = 1 = a - 2b + 3c$

$\delta_1(1,-1,1) = 0 = a - b + c$

$\delta_1(2,-4,7) = 0 = 2a - 4b + 7c$

Ex 20)

De fato, seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ base de W e complete-a em $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ em base de V.

Se $f \in W^*$, e $\{f_1, \dots, f_m, \dots, f_n\}$ é a base dual, então $f = \sum_1^m \lambda_i f_i$

Defina $g \in V^*$ por $g = \sum_1^n \lambda_i f_i$, com $\lambda_j = 0$, $j = m+1, \dots, n$. Assim $f = g$ em W $\blacksquare$

Exercício 21)

De fato, se $f \in V^*$, $f \neq 0$, então $H = \ker f$ é hiperplano de V.

Seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = \alpha$.
Então, se $W = \{v \in V : f(v) = \alpha\}$, temos que, p/ todo $h \in H$, $v_0 + h \in W$ e se $w \in W$ então $w - v_0 \in H$ e logo $w = w - v_0 + v_0 \in$
$\in v_0 + H$

Segue que $W = v_0 + H$ e logo W é hiperplano afim $\square$

Exercício 22)

Seja $\mathcal{B}'' = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de W e complete a em $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ base de V. Seja $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n\}$ a base dual de $\mathcal{B}$.

AF: $W = \ker f_{m+1} \cap \ker f_{m+2} \cap \dots \cap \ker f_n$

De fato, seja $w \in W$, $w = \sum_1^m x_i v_i$
Então p/ cada $j = m+1, \dots, n$,
$$f_j(w) = \sum x_i f_j(v_i) = 0$$
Logo $w \in \ker f_{m+1} \cap \dots \cap \ker f_n$

Reciprocamente, se $v = \sum_i^n x_i v_i \in V$, se $v \in \ker f_{m+1} \cap \dots \cap \ker f_n$, então $x_{m+1} = \dots$
$= x_n = 0$ $\therefore$ $v \in W$ $\square$

Exercício 23)

Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, considere $f_\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, dada por

$$f_\alpha(p(x)) = p(\alpha) + p(-\alpha)$$

Então $f_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$:

De fato, se $\lambda \in \mathbb{K}$, $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$, temos

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda p_1 + p_2(x)) &= \lambda p_1 + p_2(\alpha) + \lambda p_1 + p_2(-\alpha) \\ &= \lambda(p_1(\alpha) + p_1(-\alpha)) + p_2(\alpha) + p_2(-\alpha) \\ &= \lambda f_\alpha(p_1) + f_\alpha(p_2) \end{aligned}$$

Além disso, para cada elemento de W e $\alpha \in \mathbb{K}$, $w = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^{2j+1}$

Assim

$$\begin{aligned} f_\alpha(w) &= w(\alpha) + w(-\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Logo $W \subset \bigcap_{\alpha \in \mathbb{K}} \ker f_\alpha$

Reciprocamente, se $p(x) \in \bigcap_{\alpha \in \mathbb{K}} \ker f_\alpha$, então $p(\alpha) = -p(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Em particular, se $p = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x^j$

Então

$$p(\alpha) + p(-\alpha) = \sum_{j=0}^{\lfloor n \rfloor/2} \lambda_{2j} x^{2j} = 0$$

p/ todo $\alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow p(x) + p(-x) = 0$

$\Rightarrow \lambda_{2j} = 0$, $j = 1, \dots, \lfloor n \rfloor / 2$

Logo $p \in W$. $\square$

Exercício 24

De fato, seja $v \notin \ker f = \ker g$

Assim $f(v) \neq 0 \neq g(v)$ e portanto $f(v) = \frac{f(v)}{g(v)} g(v)$

Além disso

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \frac{f(v)}{g(v)} g(v)$$

$$= \frac{f(v)}{g(v)} g(\alpha v) = \lambda g(\alpha v)$$

Logo $f(w) = \lambda g(w)$, $\forall w \in \operatorname{span}\{v\}$

Agora, $V = \ker f \oplus \operatorname{span}\{v\}$, pelo visto em sala, logo, dado $u \in V$, $u = w + \mu v$, temos

$$f(u) = f(w + \mu v) = f(w) + f(\mu v)$$
$$= g(w) + \lambda g(\mu v)$$
$$= \lambda g(w) + \lambda g(\mu v)$$
$$= \lambda g(w + \mu v)$$
$$= \lambda g(u)$$

Logo $f = \lambda g$, i.e.: $f - \lambda g = 0 \Rightarrow f, g$ são L.D. $\square$

25)

Se $W \subseteq U$ é hiperplano então $\exists f \in U^*$, $W = \ker f$.

Note que

$$u \in T(W) \iff u = T(w);\ w \in W$$
$$\iff u = T(w);\ w \in \ker f$$
$$\iff u = T(w),\ f(w) = 0$$
$$\iff u;\ T^{-1}(u) = w,\ f(w) = 0$$
$$\iff u;\ f(T^{-1}(u)) = 0$$
$$\iff u \in \ker f \circ T^{-1}$$

Como $f \circ T^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ é funcional linear, segue que $T(W) = \ker f \circ T^{-1}$ é hiperplano.

Exercício 26)

Suponha $H \subseteq M_n(\mathbb{K})$ tq $H \cap Gl_n(\mathbb{K}) = \phi$

a) Seja $N \notin H$. Como $H = \ker f$, p/ algum funcional linear f, pelo visto em sala temos que

$$M_n(\mathbb{K}) = H \oplus \operatorname{span}\{N\}$$

Logo, $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ e $M \in H$ tais que
$$Id = M + \alpha N$$

b) Assim, se U é nilpotente, suponha $U \notin H$. Então, por (a), temos
$$Id = M + \alpha U$$
p/ $M \in H$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
Então como $M \notin GL_n(\mathbb{K})$,
$0 = \det(M) = \det(Id - \alpha U)$
o que implica α é autovalor de U.
Mas U nilpotente implica $\alpha = 0$, $\rightarrow\leftarrow$, pois se não teríamos $M = Id \in H$

c) Se toda matriz nilpotente está em H, então toda matriz E_{ij}, $i \neq j$ está em H, absurdo, pois daí segue que $GL_n(\mathbb{K}) \cap H \neq \emptyset$.

27) OK

28) OK

29) a) Seja $f \in W_1^0 \cap W_2^0$ e $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$
Então $f(w_1 + w_2) = f(w_1) + f(w_2) = 0 + 0 = 0$
Logo $f \in (W_1 + W_2)^0$.
Agora, suponha $f \in (W_1 + W_2)^0$. Como
$W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$, p/ $w_i \in W_i$, $f(w_i) = 0$
e logo $f \in W_i^0$, $i = 1, 2$, donde $f \in W_1^0 \cap W_2^0$.

b) Seja $f \in W_1^0 + W_2^0$. Então $f = g + h$, $g \in W_1^0$ e
$h \in W_2^0$. Seja $w \in W_1 \cap W_2$
Então

$$f(w) = (g+h)(w) = g(w) + h(w) = 0 + 0 = 0$$

Logo $f \in (W_1 \cap W_2)^0$ e $W_1^0 + W_2^0 \subseteq (W_1 \cap W_2)^0$
Além disso

$$\dim(W_1^0 + W_2^0) = \dim W_1^0 + \dim W_2^0 - \dim(W_1^0 \cap W_2^0)$$
$$= \dim V - \dim W_1 + \dim V - \dim W_2 - \dim((W_1 + W_2)^0)$$
$$= 2\dim V - \dim W_1 - \dim W_2 - [\dim V - \dim(W_1 + W_2))$$
$$= \dim V - \dim W_1 - \dim W_2 + \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= \dim V - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$= \dim((W_1 \cap W_2)^0)$$

Logo $W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$. $\square$

Exercício 30)

a) Seja $f \in W^0$. Então, p/ todo $v \in S$, $v \in W$ $\therefore$ $f(v) = 0 \Rightarrow f \in S^0$ $\therefore$ $W^0 \subseteq S^0$

b) Seja $f \in S^0$ e $v = \sum \lambda_i s_i$, $s_i \in S$, $v \in \langle S \rangle$. Então $f(v) = f(\sum \lambda_i s_i) = \sum \lambda_i f(s_i)$ $= \sum \lambda_i \cdot 0 = 0$ $\therefore$ $f \in \langle S \rangle^0$

Agora, se $f \in \langle S \rangle^0$, como $S \subset \langle S \rangle$, segue que $f \in S^0$ $\therefore$ $S^0 = \langle S \rangle^0$.

c) Provemos que $S^0 \subseteq W^0 \Rightarrow W \subseteq S$

Suponha que $W \not\subseteq S$. Então $\exists\, w \in W$, $w \notin S$. Claramente $w \neq 0$, logo, se $\{v_i\}_{i \in I}$ é base de S, então $\{v_i\}_{i \in I} \cup \{w\}$ é L.I.

Estenda-a numa base $\{v_i\}_{i \in I} \cup \{w\} \cup \{u_j\}_{j \in J}$ de V.

Defina $f \in V^*$ dada por

$$\begin{cases} f(v_i) = 0, & \forall i \in I \\ f(w) = 1 \\ f(u_j) = 0, & \forall j \in J \end{cases}$$

Então $f(v) = 0$ $\forall v \in S$, pois $\{v_i\}_{i \in I}$ é base de S e logo $f \in S^0 \Rightarrow f \in W^0$. Mas $f(w) = 1 \neq 0 \Rightarrow f \notin W^0 \rightarrow \leftarrow$. Logo $W \subseteq S$

Assim $S^0 = W^0 \Rightarrow S = W$ ▯

d) Defina

$$\Phi : S^0 \longrightarrow (V/S)^*$$
$$f \longmapsto \Phi(f) : V/S \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$v + S \longmapsto f(v)$$

Note que $\Phi(f)$ está bem definida: se $v + S = u + S \Rightarrow$
$\Rightarrow v - u \in S \Rightarrow f(v-u) = 0 \Rightarrow f(v) = f(u)$,
logo $\Phi(f)(v+S) = f(v) = f(u) = \Phi(f)(u+S)$.
Note que $\Phi(f)$ é linear: se $f, g \in S^0$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
$\Phi(\lambda f + g)(v+S) = (\lambda f + g)(v)$
$= \lambda f(v) + g(v) = \lambda \Phi(f)(v+S) + \Phi(g)(v+S)$.
Note que $\Phi(f)$ é injetiva: se $\Phi(f) = 0$, então
$\Phi(f)(v+S) = f(v) = 0$, $\forall v + S \in V/S \Rightarrow$
$\Rightarrow f(v) = 0$, $\forall v \in V$.
Finalmente, se $g : V/S \longrightarrow \mathbb{K}$ é elemento
$v + S \longmapsto g(v+S)$
do dual, defina $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$
$v \longmapsto g(v+S)$
Note que $f \in S^0$: de fato, se $s \in S$, então
$f(s) = g(s+S) = g(0+S) = 0$ e logo $\Phi(f) = g$
pois
$$\Phi(f)(v+S) = f(v) = g(v+S).$$ ▯

Exercício 31)

Note que $S \subset \Phi^{-1}((S^0)^0)$

De fato, dado $s \in S$, $\forall f \in S^0$ temos $\phi_s(f) = f(s) = 0$

Seja $\{v_1, \dots, v_s\}$ base de $\langle S \rangle$ e complete-a $\{v_1, \dots, v_s, \dots, v_n\}$ base de V

Seja $\{f_1, \dots, f_s, \dots, f_n\}$ base dual em V^*.

Se $u \in \Phi^{-1}((S^0)^0) \Rightarrow \phi_u \in (S^0)^0 \Rightarrow \forall f \in S^0$, $f(u) = 0$.
$= \Phi^{-1}((S)^0)$

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$. Como $\{f_{s+1}, \dots, f_n\} \subset S^0$, temos que $f_j(u) = 0$, $\forall j = s+1, \dots, n \Rightarrow \lambda_j = 0$ $\forall j = s+1, \dots, n$ e portanto $u = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i$ e logo $u \in \langle S \rangle$

Exercício 32) Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V

Então $S^0 = \{0\} \Rightarrow (S^0)^0 = (\{0\})^0 = V^{**}$. Logo S é conjunto gerador de $\Phi^{-1}(V^{**}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi(S)$ é conjunto gerador de V^{**} e logo Φ leva base em base e portanto é isomorfismo.

Caso $\dim V = \infty$, então $\dim V^* > \dim V \Rightarrow$
$\dim V^{**} > \dim V^* > \dim V$ logo o Φ não é isomorfismo

Ou ainda, seja I base de V e separe $I = J \cup K$, com J e K infinitos.

Seja $\{v_i^*\}_{i \in I} \subset V^*$ o conjunto dual à I e complete-a em $\{v_i^*\}_{i\in I} \cup \{g_j\}_{j \in L}$. Defina $\phi : V^* \longrightarrow \mathbb{K}$ para ser o funcional linear tal que $\phi(v_i^*) = 0$, $\forall i \in I$, $\phi(g_j) = 1$, $\forall j \in L$.

<u>AF</u>: $\phi \notin \operatorname{Im} \Phi$. De fato, suponha que sim. Então $\exists v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_{i_j}$, onde $i_j \in I$ $\forall j = 1, \dots, n$.

Mas daí, $\forall k = 1, \dots, n$

$$0 = \phi(v_{i_k}^*) = v_{i_k}^*\left(\sum \lambda_j v_{i_j}\right)$$
$$= \lambda_k$$

Logo $v = \sum 0 v_{i_j} = 0$.

Mas daí

$$1 = \phi(g_m) = g_m(v)$$
$$= g_m(0) = 0, \quad \times$$

Logo $\phi \notin \operatorname{Im} \Phi$ e Φ não é isomorfismo. $\square$

Exercício 33)

a) De fato, $0 \in W$ e se $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in W$
$\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$
$\in W$, pois $\lambda x_1 + y_1 + \dots + \lambda x_n + y_n = \lambda(x_1 + \dots + x_n) +$
$+ (y_1 + \dots + y_n) = 0 + 0 = 0$

b) Note que tais funcionais estão, de fato, em W^0. Além disso, denotando o conjunto de tais funcionais por S, temos $\dim S = 1$. Como $\dim W^0 = \dim \mathbb{K}^n - \dim W = n - (n-1) = 1$, segue que $S = W^0$.

c) Note que $\mathbb{K}^n = W \oplus \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle$, logo
$W^* \simeq \langle (1, 1, \dots, 1) \rangle^0$
Mas

$$\langle (1, 1, \dots, 1) \rangle^0 = \{ f : f(\lambda, \dots, \lambda) = 0, \forall \lambda \}$$
$$= \{ f ; f = \sum \alpha_i x_i, \sum \alpha_i \lambda = 0 \}$$
$$= \{ f ; f = \sum \alpha_i : \sum \alpha_i = 0 \}$$

Exercício 34) ?

De fato, seja $\mathcal{B}=\{f_1,\dots,f_n\}\subset W$ uma base completada em $\mathcal{B}'=\mathcal{B}\cup\{g_i\}_{i\in I}$ uma base de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$

Exercício 35)

Sejam $\{f_1,\dots,f_n\}\subseteq V^*$ L.I. Então $\{f_1,\dots,f_n\}$ é base dual de alguma base $\{v_1,\dots,v_n\}$ de V. Assim o vetor

$$v=\sum \alpha_i v_i$$

satisfaz tal condição

Exercício 36)

a) De fato, sejam $f\in V^*$ e $u\in U$. Então

$$\begin{aligned}(\alpha T+\beta G)^t(f)(u) &= f(\alpha T+\beta G(u))\\ &= f(\alpha T(u)+\beta G(u))\\ &=\alpha f(T(u))+\beta f(G(u))\\ &=\alpha T^t(f(u))+\beta G^t(f(u))\end{aligned}$$

$= (\alpha T^t + \beta G^t)(f(u))$

b) Seja $f \in W^*$ e $u \in U$. Então

$$(G \circ T)^t (f)(u) = f(G \circ T(u))$$
$$= f(G(T(u)))$$
$$= G^t(f(T(u)))$$
$$= T^t(G^t(f(u)))$$
$$= T^t \circ G^t (f)(u)$$

c) Sejam $f \in U$, $u \in U$. Então

$$Id_U^t(f(u)) = f(Id_U(u))$$
$$= f(u)$$
$$= Id_{U^*}(f)(u)$$

d) De fato, $T^t \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$ é linear por (a) e pelo que vimos em sala

$\dim(Im\, T^t) = \dim(Im\, T) = \dim V$
$= \dim U = \dim U^*$, logo T^t é isomorfismo.

Além disso

$$T^t \circ (T^{-1})^t (f)(u) = T^t((T^{-1})^t(f(u)))$$
$$= (T^{-1})^t f(T(u))$$
$$= f(T(T^{-1}(u)))$$
$$= f(u)$$

Logo $(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$.

Exercício 37)

a) $T(x,y,z) = (x+y, y+z) \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by + cz = x+y \\ dx + ey + fz = y+z \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 = b, & c = 0 \\ e = 1 = f, & d = 0 \end{cases}$

Logo

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\phi(x,y) = 3x - 2y$ então $\phi(x,y) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Assim

$$T^t \circ \phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= 3x + y - 2z$$

$$\therefore T^t \circ \phi = 3x - y - 2z$$

Ou ainda

$$T^t \circ \phi(x,y,z) = \phi(x+y, y+z)$$

$$= 3(x+y) - 2(y+z)$$

$$= 3x + y - 2z$$

Temos $\phi(T(x,y,z)) = \phi(x+y, 2x-y)$
$$= 3(x+y) - 2(2x-y)$$
$$= 3x - 4x + 3y + 2y$$
$$= -x + 5y$$

Exercício 38)

Temos
$$D^t(f(p(x))) = f(D(p(x)))$$
$$= f(p'(x))$$
$$= \int_a^b p'(x)\,dx$$
$$= p(b) - p(a)$$

Exercício 39)

Suponha $0 \to U \xrightarrow{T_1} V \xrightarrow{T_2} W \to 0$ exata.
Então $Im(T_1) = \ker(T_2)$, $Im\, T_2 = W$, $\ker T_1 = \{0\}$. Assim $\dim Im\, T_2 = \dim W$ $= \dim Im\, T_2^* = \dim W^*$, logo $\ker T_2^{t} = \{0\}$, para $\dim W^* = \dim Im\, T_2^t + \dim \ker T_2^t$.
Além disso, $Im\, T_1^t = (\ker T_1)^0 = (\{0\})^0 =$ $= U^*$ e $\ker T_1^t = (Im\, T_1)^0 = (\ker T_2)^0$
$$= Im\, T_2^t$$
A recíproca é análoga.

Exercício 40)

(a) ⇒ (b)

Suponha que vale a.

Então $\int_{-1}^{1} \left(\prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k) \right) dx = \underbrace{\sum \lambda_i \prod (x - \alpha_i)\big|_{\alpha_i}}_{=0}$

(b) ⇒ (a)

Exercício 41) ?

Exercício 42)

Note que $\dim \operatorname{Im} (T - \alpha Id) = \dim \operatorname{Im}(T^t - \alpha Id^t)$

e logo $\dim \ker (T - \alpha Id) = \dim \ker (T^t - \alpha Id^t)$

logo, se $\exists u \neq 0$, então $\dim \ker(T^t - \alpha Id^t) > 0$, i.e: $\exists f$ tal que $0 = T^t(f) - \alpha Id(f)$

i.e: $T^t(f) = \alpha f$ ■

Exercício 43)

Suponha que $\Psi(T) = T^t = \Psi(S) = S^t$

Então, $\forall f \in V^*$

$$f(T(v)) = T^t(f)(v) = S^t(f)(v) = f(S(v))$$

$\forall v \in V$.

Assim, p/ cada $v \in V$, $f(T(v) - S(v)) = 0$, $\forall f \in V^* \Rightarrow T(v) - S(v) = 0 \Rightarrow T(v) = S(v)$

$\therefore T = S$ e Ψ é injetora. Como $\dim \mathcal{L}(U,V) = \dim \mathcal{L}(V^*, U^*)$, segue que Ψ é isomorfismo

Exercício 44)

AF: $Im(T) = \langle Col_1(A), \dots, Col_n(A) \rangle$

De fato, seja

$$v = \sum \lambda_i col_i(A)$$

Então

$$T\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i Col_i(A) = v.$$

Logo $\langle Col_1(A), \dots, Col_n(A) \rangle \subset Im(T)$

Além disso, se $v \in Im\, T$, então $v = T(u)$, $u = \sum \lambda_i e_i \Rightarrow$

$$v = T\left(\sum \lambda_i e_i\right) = \sum \lambda_i Col_i(A)$$

Logo $v \in \langle col_1(A), \dots, col_n(A) \rangle$.
Segue que
$$\dim Im(T) = \# \text{colunas L.I. de } A$$
$$= \text{posto-coluna de } A$$

Assim
$$\text{posto-coluna}(A) = \dim Im(T) = \dim Im(T^t)$$
$$= \text{posto-coluna}(A^t)$$

Mas $\text{posto-coluna}(A^t) = \text{posto-linha de } A$, logo $\text{posto-coluna}(A) = \text{posto-linha}(A)$ $\square$

<u>Exercício 41)</u>

Defina
$$\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$v \longmapsto \sum \phi_i(v) e_i = (\phi_1(v), \dots, \phi_p(v))$$

$$\Psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$v \longmapsto \sum \psi_i(v) e_i = (\psi_1(v), \dots, \psi_q(v))$$

Então $\ker \Phi = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \phi_i$

$$\ker \Psi = \bigcap_{i=1}^{q} \ker \psi_i$$

Do exercício 29) b) Temos que

$$\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \phi_i\right)^0 = (\ker \phi_1)^0 + \dots + (\ker \phi_p)^0$$

Seja $g \in (\ker \phi_i)^0$.
Então $g(v) = 0$, $\forall v \in \ker \phi_i$, daí
$\ker \phi_i \subset \ker g$.
Como $\ker \phi_i$ é hiperplano, segue que
$\ker \phi_i = \ker g$ ou $\ker g = V$ (*)
Se $\ker \phi_i = \ker g$, então pelo ex. 24
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \phi_i = g$
Daí
$$g \in (\ker \phi_i)^0 \iff g = \lambda \phi_i$$
Logo
$$g \in \left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \phi_i\right)^0 \iff g \in \sum_{i=1}^{p} (\ker \phi_i)^0$$
$$\iff g = \sum_{\lambda=1}^{p} \lambda \phi_i$$
$$\iff g \in \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle$$

Se $\sum (\phi_i(v))^2 = \sum (\psi_j(v))^2$, então
$\bigcap \ker \phi_i = \bigcap \ker \psi_j$, logo, segue a igualdade

(*) se $\ker g = V \Rightarrow g \equiv 0$ e $g = 0 \cdot \phi_i$ ∎

Exercício 41)

Alt:

Define

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$v \longmapsto (\phi_1(v), \dots, \phi_p(v))$$

Note que $\ker T = \bigcap_{j=1}^{p} \ker \phi_j$

Ainda: note que

$$T^t : (\mathbb{R}^p)^* \longrightarrow V^*$$
$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum \lambda_i x_i \longmapsto \sum \lambda_i \phi_i$$

Assim que $\operatorname{Im} T^t = \langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle$

Agora:

$$\operatorname{Im} T^t = (\ker T)^0$$

isto é,

$$\langle \phi_1, \dots, \phi_p \rangle = (\ker T)^0$$

Mas

$$(\ker T)^0 = \left(\bigcap_{j=1}^{p} \ker \phi_j\right)^0$$
$$= (\ker \phi_1)^0 + \dots + (\ker \phi_p)^0$$

Como $(\ker \phi_i)^0 = \langle \phi_i \rangle$ e $\langle v \rangle + \langle w \rangle = \langle v, w \rangle$

segue $\square$

Exercício 40

(b) $\Rightarrow$ (a) 1

$$\int_{-1}^{1} \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)\,dx = 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \int_{-1}^{1} p(x)dx = \sum \lambda_i p(\alpha_i)$$

Defina $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$p(x) \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x)dx$$

e

$$f_{\alpha_i} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) \longmapsto p(\alpha_i)$$

Então tanto f como f_{α_i} são funcionais lineares.

Note que se $p \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_{\alpha_i}$, então

$$p(x) = q(x) \prod_{j=1}^{n} (x-\alpha_j)$$

e como $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow q(x) = \lambda \in \mathbb{R}$, i.e.: $p(x) = \lambda \prod (x-\alpha_i)$, assim $f(p(x)) = \lambda \int_{-1}^{1} \prod (x-\alpha_i)dx$ $= 0$, por hipótese, i.e.: $p \in \ker f$, assim $\bigcap \ker f_{\alpha_i} \subset \ker f$

Isso implica que $f \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_{\alpha_i}\right)^0$, isto é,

$\forall v \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_{a_i}$, $f(v)=0$.

Mas então

$$f \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_{a_i}\right)^0 = \ker f_{a_1}^0 + \dots + \ker f_{a_n}^0$$

Mas note que $f \in \ker f_{a_i}^0 \Rightarrow \ker f_{a_i} \subset \ker f \Rightarrow$
$\Rightarrow \ker f = \ker f_{a_i}$ ou $\ker f = V$.
Se $\ker f = \ker f_{a_i}$, então, pelo exercício 24, $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f = \lambda f_{a_i}$
Se $\ker f = V \Rightarrow f = 0 \Rightarrow f = 0 \cdot f_{a_i}$
Assim, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$f = \lambda_1 f_{a_1} + \dots \lambda_n f_{a_n}$$

isto é,

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p(a_i)$$

$$\phi_1 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \phi_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto 1 \qquad\qquad x \longmapsto i$$

$$\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longmapsto x$$

4.1) b) Contraexemplo ↑