Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada

Lista 5: Determinantes

Exercício 1. Mostre que:

a. Se $f : V_1 \times \cdots \times V_p \to \mathbb{K}$ e $g : W_1 \times \cdots \times W_q \to \mathbb{K}$ são formas p e q-lineares, respectivamente, então a aplicação $f \boxtimes g : V_1 \times \cdots \times V_p \times W_1 \times \cdots \times W_q \to \mathbb{K}$ definida por

$$f \boxtimes g(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_q) = f(v_1, \ldots, v_p) \cdot g(w_1, \ldots, w_q)$$

é uma aplicação $(p+q)$-linear.

b. Se $f : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ é p-linear e $g : W \to V$ é linear então a composta $g \circ f : V_1 \times \cdots \times V_p \to V$ é p-linear.

c. Se $f, g : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ são p-lineares e $\alpha \in \mathbb{K}$, as aplicações $f + g$ e αf são p-lineares.

Exercício 2. Dada $f \in \mathscr{L}_p(V; W)$ e $\sigma \in S_p$ o grupo de permutações de p elementos, denotamos

$$f^\sigma(v_1, \ldots, v_p) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}).$$

Mostre que:

a. Dados $\psi \in S_p$ então $(f^\sigma)^\psi = f^{\psi \circ \sigma}$.

b. g é p-linear se e somente se g^σ é p-linear, para todo $\sigma \in S_p$.

c. Se $g \in \mathscr{L}_p(V; W)$ então $(f+g)^\sigma = f^\sigma + g^\sigma$ e $(\alpha f)^\sigma = \alpha f^\sigma$.

d. f é simétrica $\iff f^\tau = f$ para toda transposição $\tau \in S_p$.

e. f é antissimétrica $\iff f^\tau = -f$ para toda transposição $\tau \in S_p$.

Exercício 3. Mostre que se $f : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ é uma aplicação p-linear e $\dim W > 1$ então $\mathrm{Im}(f)$ não necessariamente é um subespaço vetorial de W.

Exercício 4. Mostre que:

a. O subconjunto $\mathrm{Sym}_p(V, W)$ de $\mathscr{L}_p(V, W)$ formado pelas aplicações p-lineares *simétricas* em V é um subespaço.

b. O subconjunto $\mathrm{ASym}_p(V, W)$ de $\mathscr{L}_p(V, W)$ formado pelas aplicações p-lineares *antissimétricas* em V é um subespaço.

c. O subconjunto $\mathrm{Alt}_p(V, W)$ de $\mathscr{L}_p(V, W)$ formado pelas aplicações p-lineares *alternadas* em V é um subespaço.

d. Mostre que se $v_1, ..., v_p \in V$ for LD e $f \in \mathscr{L}_p(V, W)$ for alternada, então $f(v_1, ..., v_k) = 0$.

Exercício 5. Mostre que se $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ então $\mathscr{L}_2(V, W) = \mathrm{Sym}_2(V, W) \oplus \mathrm{ASym}_2(V, W)$.

Exercício 6. Sejam V_1, V_2 e W $\mathbb{K}$-e.v., considere a função

$$\begin{aligned}\Omega : \mathscr{L}_2(V_1, V_2; W) &\to \mathscr{L}(V_1, \mathscr{L}(V_2, W))\\ \varphi &\mapsto \Omega(\varphi) : V_1 \to \mathscr{L}(V_2, W)\\ & \qquad v_1 \mapsto \Omega(\varphi)(v_1) : V_2 \to W\\ & \qquad\qquad v_2 \mapsto \Omega(\varphi)(v_1)(v_2) = \varphi(v_1, v_2)\end{aligned}$$

Mostre que Ω está bem definida (isto é, $\Omega(\varphi) \in \mathscr{L}(V_1, \mathscr{L}(V_2, W))$) e é um isomorfismo.

Exercício 7. Calcule o seguinte determinante, onde $a_i := \sum_{k=1}^{i} k$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & a_2 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Exercício 8. Calcule o seguinte determinante $n \times n$, onde $a, b \in \mathbb{K}$:

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercício 9. Seja $V = V_1 \oplus V_2$ uma soma direta de dois subespaços V_1 e V_2. Sejam $f_i \in \mathscr{L}(V_i)$ para $i = 1, 2$. Defina o endomorfismo $f \in \mathscr{L}(V)$ dado por $f(v) = f_1(v_1) + f_2(v_2)$ onde $v = v_1 + v_2$ com $v_i \in V_i$ para $i = 1, 2$. Prove que $\det(f) = \det(f_1) + \det(f_2)$.

Exercício 10. Prove que o determinante da matriz $n \times n$ de entradas $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ é igual a $(n-1)(-1)^{n-1}$.

Exercício 11. [Determinante de Gram] Sejam $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{K}$ funções definidas em um conjunto arbitrário X. Mostre que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é LI em $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ se e somente se existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ tais que:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercício 12. Seja $A \in M_n(\mathbb{Z})$ uma matriz com coeficientes inteiros. Mostre que A é invertível se e somente se $\det(A) = \pm 1$ (i.e. se e somente se $\det(A)$ é invertível em $\mathbb{Z}$).

Exercício 13. [Determinante de Vandermonde] Dado um inteiro $n \geq 2$ e escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ denote por:

$$\mathscr{V}_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ao chamado determinante de Vandermonde. Denote também por $p \in \mathbb{K}[x]$ ao polinômio $p = \mathscr{V}_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$.

a. Determine $\deg(p)$ e suas raízes.

b. Deduza uma expressão de p em função de $\mathscr{V}_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})$.

c. Deduza uma expressão explicita para $\mathscr{V}_n(a_1,\dots,a_{n-1},a_n)$.

Exercício 14. [DETERMINANTE DAS MULTIPLICAÇÕES À ESQUERDA E À DIREITA] Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, denote por

$$\begin{aligned} L_A, R_A : M_n(\mathbb{K}) &\to M_n(\mathbb{K}) \\ L_A(X) &= A \cdot X \\ R_A(X) &= X \cdot A \end{aligned}$$

as multiplicações à esquerda e à direita por A, respectivamente.

a. Verifique que L_A e R_A são lineares.

b. Mostre que $\det(L_A) = \det(R_A) = (\det A)^n$. Dica: escolha cuidadosamente uma base de $M_n(\mathbb{K})$.

Exercício 15. [WRONSKIANO] Dado o conjunto $\{f_1,\dots,f_n\}$ de funções no $\mathbb{K}$-e.v. $\mathscr{F}(U,\mathbb{K})$ onde $U \subseteq \mathbb{R}$ é um aberto. Suponha ainda que as funções f_i são $(n-1)$-vezes diferenciáveis, então para cada $x \in U$, define-se o *Wronskiano* como sendo a aplicação $\mathscr{W}(f_1,\dots,f_n) : U \to \mathbb{K}$ dada por:

$$\mathscr{W}(f_1,\dots,f_n)(x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Mostre que se existe $x \in U$ tal que $\mathscr{W}(f_1,\dots,f_n)(x) \neq 0$ então $\{f_1,\dots,f_n\}$ é LI. Vale a recíproca?

Exercício 16. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de dimensão n e V^* seu espaço dual.

a. Sejam Δ e Δ^* duas funções determinantes em V e V^*, respectivamente. Mostre que a aplicação $(2n)$-linear $\Delta^* \boxtimes \Delta$, assume o mesmo valor em quaisquer dois sistemas de bases duais, i.e.

$$\Delta^* \boxtimes \Delta(v_1^*,\dots,v_n^*,v_1,\dots,v_n) = \Delta^* \boxtimes \Delta(w_1^*,\dots,w_n^*,w_1,\dots,w_n).$$

b. Duas funções determinante $\Delta \neq 0$ e $\Delta^* \neq 0$ em V e V^*, respectivamente, satisfazendo

$$\Delta^*(v_1^*,\dots,v_n^*) \cdot \Delta(v_1,\dots,v_n) = 1 \text{ sempre que } v_i^*(v_j) = \delta_{ij}.$$

são chamadas *duais*.

Seja $\Delta \neq 0$ uma função determinante em V. Defina a função $\Delta^* : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n\text{-vezes}} \to \mathbb{K}$ como segue:

a) Se os vetores $v_1^*,\dots,v_n^* \in V^*$ são LD então $\Delta^*(v_1^*,\dots,v_n^*) = 0$.

b) Se os vetores $v_1^*,\dots,v_n^* \in V^*$ são LI (logo eles formam uma base $\mathscr{C}$ de V^*) então $\Delta^*(v_1^*,\dots,v_n^*) = \frac{1}{\Delta(v_1,\dots,v_n)}$ onde $\mathscr{B} = \{v_1,\dots,v_n\}$ é a base de V tal que $\mathscr{B}^* = \mathscr{C}$.

Prove que Δ^* é uma função determinante em V^* e que as funções determinantes Δ e Δ^* são duais. Conclua que para cada função determinante não trivial em V existe exatamente uma função determinante dual em V^*.

c. Sejam Δ e Δ^* funções determinantes duais, mostre que

$$\Delta^* \boxtimes \Delta(v_1^*,\dots,v_n^*,u_1,\dots,u_n) = \begin{vmatrix} v_1^*(u_1) & v_1^*(u_2) & \cdots & v_1^*(u_n) \\ v_2^*(u_1) & v_2^*(u_2) & \cdots & v_2^*(u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^*(u_1) & v_n^*(u_2) & \cdots & v_n^*(u_n) \end{vmatrix}.$$

1)

a) De fato, se $u_i \in V_i$, $x_j \in W_j$, $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$f \boxtimes g(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q)$$
$$= f(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p)\cdot g(w_1,\dots,w_q)$$
$$= (f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p)+f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p))g(w_1,\dots,w_q)$$
$$= f(v_1,\dots,v_p)g(w_1,\dots,w_q)+f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p)g(w_1,\dots,w_q)$$
$$= f\boxtimes g(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q)+f\boxtimes g(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q)$$

Análogo p/ $f\boxtimes g(v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,w_i+u_i,\dots,w_q)$

E

$$f\boxtimes g(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p,w_1,\dots,w_q)$$
$$= f(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p)g(w_1,\dots,w_q)$$
$$= \alpha f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p)g(w_1,\dots,w_q)$$
$$= \alpha(f\boxtimes g)$$

Análogo p/ $f\boxtimes g(v_1,\dots,v_p,w_1,\dots,\alpha w_i,\dots,w_q)$.

b) De fato, seja $u_i \in V_i$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$g\circ f(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p) = g(f(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p))$$
$$= g(f(v_1,\dots,v_p)+f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p))$$
$$= g(f(v_1,\dots,v_p))+g(f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p))$$
$$= g\circ f(v_1,\dots,v_p)+g\circ f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p)$$

e

$$g\circ f(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p) = g(\alpha f(v_1,\dots,v_p))$$
$$= \alpha g(f(v_1,\dots,v_p))$$
$$= \alpha (g\circ f)(v_1,\dots,v_p)$$

c) Seja $u_i \in V_i$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$f+g(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p) = f(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p) + g(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p)$$
$$= f(v_1,\dots,v_p) + f(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p) + g(v_1,\dots,v_p) + g(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p) = f+g(v_1,\dots,v_p) + f+g(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p)$$

e

$$f+g(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p) = f(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p) + g(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p) = \alpha f(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p) + \alpha g(v_1,\dots,v_i,\dots,v_p)$$
$$= \alpha (f+g)(v_1,\dots,v_p)$$

e

$$\alpha f(v_1,\dots,v_i+u_i,\dots,v_p) = \alpha f(v_1,\dots,v_p) + \alpha f(\dots,u_i,\dots,v_p)$$
$$= (\alpha f)(v_1,\dots,v_p) + (\alpha f)(v_1,\dots,u_i,\dots,v_p)$$

Ex 2)

a) $(f^{\sigma})^{\psi}(v_1,\dots,v_p) = (f^{\sigma})(v_{\psi(1)},\dots,v_{\psi(p)})$
$= f(v_{\sigma\circ\psi(1)},\dots,v_{\sigma\circ\psi(p)})$
$= (f^{\sigma\circ\psi})(v_1,\dots,v_p)$

b)

De fato, suponha g linear. Dado $i_0 \in \{1,\dots,p\}$, seja $(v_1,\dots,v_p)$ tal que

$$v_j = u_{i_0} + w_{i_0}, \quad i = i_0$$
$$v_j = u_j, \quad j \neq i_0$$

Então

$g^{\sigma}(v_1,\dots,v_p) = g(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$
$= g(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)})$
$+ g(u_{\sigma(1)},\dots w_{\sigma(i_0)},\dots,u_{\sigma(p)})$
$= g^{\sigma}(u_1,\dots,u_p) + g^{\sigma}(u_1,\dots w_{i_0}, u_p)$

e

$g^{\sigma}(v_1,\dots,\alpha v_i,\dots,v_p) = g(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(p)})$
$\overset{\|}{(u_1,\dots,u_p)}$
$= \alpha g(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$
$= \alpha g^{\sigma}(v_1,\dots,v_p)$

c) $(f+g)^{\sigma}(v_1,\dots,v_p) = f+g(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(p)})$
$= f(v_{\sigma(1)},\dots v_{\sigma(p)}) + g(v_{\sigma(1)},\dots v_{\sigma(p)})$
$= f^{\sigma}(v_1,\dots,v_p) + g^{\sigma}(v_1,\dots,v_p)$

Análogo p/ $(\alpha f)^\sigma$

d) $(\Rightarrow)$ Claro

$(\Leftarrow)$ se $\sigma \in S_n$, seje $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \tau_m$

Então

$$f^\sigma = f^{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m} = ((f^{\tau_1})^{\tau_2}) \ldots)^{\tau_m}$$

$$= ((f)^{\tau_2} \ldots)^{\tau_m}$$

$$\vdots$$

$$= f$$

e) $(\Rightarrow)$ Claro

$(\Leftarrow)$ se $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m$

Então

$$f^\sigma = f^{\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m} = ((f^{\tau_1})^{\tau_2}) \ldots)^{\tau_m}$$

$$= ((-f)^{\tau_2}) \ldots)^{\tau_n}$$

$$= (-1)^m f$$

$$= sgn(\sigma) f$$

Exercício 3)

Seja $f: K[x] \times K[y] \longrightarrow K[x,y]$

$(p, q) \longmapsto p \cdot q$

Então $x = x \cdot 1 \in Im(f)$

$y = 1 \cdot y \in Im(f)$

Mas $x + y \notin Im(f)$

Exercício 4)

a) Sejam $f, g \in Symp(V, W)$, $\alpha \in K$. Então

$(\alpha f + g)^{\sigma}(v) = \alpha f^{\sigma} + g^{\sigma}(v) = \alpha f^{\sigma}(v) + g^{\sigma}(v)$

$= \alpha f(v) + g(v)$

$= (\alpha f + g)(v)$

Logo $\alpha f + g \in Symp(V, W)$

b) Sejam "

$(\alpha f + g)^{\sigma}(v) = \alpha f^{\sigma} + g^{\sigma}(v) = \alpha f^{\sigma}(v) + g^{\sigma}(v)$

$= \alpha \, sgn(\sigma) f(v) +$

$g \, sgn(\sigma) g(v)$

$= sgn(\sigma)(\alpha f + g)(v)$

$\Rightarrow \alpha f + g \in Asymp(V, W)$

p

c) Sejam $f, g \in Alt$, $\alpha \in \mathbb{K}$

Assim

$$(\alpha f + g)(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_p)$$
$$= \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_p) + g(v_1, \dots, v_i, \dots v_i, \dots v_p)$$
$$= 0$$

Logo $\alpha f + g \in Alt$

d)

Se $v_1, \dots, v_p$ é L.D., então v_p $\exists j_0$ tal que v_{j_0} é comb. linear de v_j, $j \neq j_0$

SPG, suponha $j_0 = p$ e

$$v_p = \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j v_j$$

Então

$$f(v_1, \dots, v_p) = f\left(v_1, \dots, v_{p-1}, \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j v_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p-1} \alpha_j (v_1, \dots, v_{p-1}, v_j)$$
$$= 0$$

Exercício 5)

Dada $f \in \mathcal{L}_2(V,W)$, defina

$$f_1(v_1,v_2) = \frac{f(v_1,v_2)+f(v_2,v_1)}{2}$$

$$f_2(v_1,v_2) = \frac{f(v_1,v_2)-f(v_2,v_1)}{2}$$

Então

$$f_1(v_2,v_1) = f_1(v_1,v_2) \Rightarrow f_1 \in Sym$$

$$f_2(v_2,v_1) = -f_2(v_1,v_2) \Rightarrow f_2 \in Asym$$

e

$$f = f_1 + f_2$$

Além disso, se $f \in Sym_2(V,W) \cap Asym_2(V,W)$ temos

$$f(v_1,v_2) = f(v_2,v_1) = -f(v_1,v_2)$$

$$\Rightarrow 2f(v_1,v_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(v_1,v_2) = 0 \Rightarrow Sym_2(V,W) \cap Asym_2(V,W) = \{0\}$$

Exercício 6)

Dada $\varphi \in \mathcal{L}_2(V_1, V_2; W)$, temos que mostrar que a aplicação $\Omega(\varphi) \in \mathcal{L}(V_1, \mathcal{L}(V_2, W))$ isto é, que p/ cada $v_1 \in V_1$, $\Omega(\varphi)(v_1)$ associa uma função $\varphi_1 : V_2 \to W$ linear, onde

$$\varphi_1(v_2) = \Omega(\varphi)(v_1)(v_2) = \varphi(v_1, v_2)$$

De fato, se $v_2, u_2 \in V_2$, $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$\Omega(\varphi)(v_1)(\alpha v_2 + u_2) = \varphi(v_1, \alpha v_2 + u_2) = \alpha \varphi(v_1, v_2) + \varphi(v_1, u_2) = \alpha \Omega(\varphi)(v_1)(v_2) + \Omega(\varphi)(v_1)(u_2)$$

Além disso, se $v_1, u_1 \in V_1$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\Omega(\varphi)(\alpha v_1 + u_1)(v_2) = \varphi(\alpha v_1 + u_1, v_2) = \alpha \varphi(v_1, v_2) + \varphi(u_1, v_2) = \alpha \Omega(\varphi)(v_1)(v_2) + \Omega(\varphi)(u_1, v_2)$$

Logo $\Omega(\varphi)(\alpha v_1 + u_1) = \alpha \Omega(\varphi)(v_1) + \Omega(\varphi)(u_1)$

Isto é, $\Omega(\varphi) : V_1 \to \mathcal{L}(V_2, W)$ é linear.

Além disso, se $\varphi, g \in \mathcal{L}_2(V_1, V_2; W)$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\Omega(\alpha\varphi + g)(v_1, v_2) = (\alpha \varphi + g)(v_1, v_2) = \alpha \varphi(v_1, v_2) + g(v_1, v_2)$$

$$= \alpha\,\Omega(\varphi)(v_1,v_2) + \Omega(g)(v_1,v_2)$$

$$\Rightarrow \Omega(\alpha\varphi+g) = \alpha\,\Omega(\varphi) + \Omega(g).$$

Logo $\Omega \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_2(V_1,V_2;W), \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,W)))$

Note que

$$\Omega(\varphi)=0 \Leftrightarrow \Omega(\varphi)(v_1,v_2) = 0, \forall v_1,v_2 \in V_1\times V_2$$

$$\Longleftrightarrow \varphi(v_1,v_2)=0, \ \forall (v_1,v_2)\in V_1\times V_2$$

$$\Longleftrightarrow \varphi \equiv 0$$

Logo $\ker(\Omega) = \{0\}$

Finalmente, se $\psi \in \mathcal{L}(V_1,\mathcal{L}(V_2,W))$, para cada $(v_1,v_2)\in V_1\times V_2$, defina

$$\varphi(v_1,v_2) = \psi(v_1)(v_2)$$

Então φ é bilinear, pois

$$\varphi(v_1,\alpha v_2+u_2) = \psi(v_1)(\alpha v_2 + u_2)$$

$$= \alpha\,\psi(v_1)(v_2) + \psi(v_1)(u_2)$$

$$\varphi(\alpha v_1+u_1, v_2) = \psi(\alpha v_1 + u_1)(v_2)$$

$$= \alpha\,\psi(v_1)(v_2) + \psi(u_1)(v_2)$$

$$= \alpha\,\varphi(v_1,v_2) + \varphi(u_1,v_2)$$

e claramente $\Omega(\varphi)(v_1,v_2) = \psi(v_1,v_2)$, $\forall$ $\forall V_1,V_2$

Exercício 8)

$$D_2(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab$$

$$= a^2+ab+b^2$$

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

$$D_3(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)\,D_2(a,b) - (ab)(a+b)$$
$$= (a+b)^3 - ab(a+b) - (ab)(a+b)$$
$$= (a+b)^3 - 2a^2b - 2ab^2$$
$$= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

$\vdots$

$$D_n(a,b) = a^n + a^{(n-1)}b + \dots + ab^{(n-1)} + b^n \; ?$$
$$= \sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j}$$

$$D_4(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & a+b & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Anım

$$D_n(a,b) = (a+b)\,D_{n-1}(a,b) - (ab)\,D_{n-2}(a,b)$$

Logo ↓ Hipótese de indução

$$D_n(a,b) = (a+b)\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j} - ab\sum_{j=0}^{n-2} a^j b^{n-2-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a^{j+1} b^{n-1-j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-2} a^{j+1} b^{\overset{n-(j+1)}{\overset{\shortparallel}{n-1-j}}}$$

$l = j+1$ $\quad$ $n-j = l$

$$= \sum_{l=1}^{n} a^l b^{n-l} + \sum_{l=1}^{n} a^{n-l} b^l - \sum_{l=1}^{n-1} a^l b^{n-l}$$

$$a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + \dots + a^n + a^{n-1} b^1 + \dots + a^1 b^{n-1} + b^n - (a^1 b^{n-1} + \dots + a^{n-1} b^1)$$

$$= a^n + a^{n-1} b^1 + \dots + a^1 b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{l=0}^{n} a^l b^{n-l}$$ e logo Vale $\forall n \in \mathbb{N}$

Exercício 11)

($\Leftarrow$) Suponha que $f_1, \dots, f_n$ é L.D.
Então $\exists$ $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tal que
$f_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i f_i$
Assim, $f_{i_0}(x_j) = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i f_i(x_j)$ e logo a coluna i_0 é comb. lineas das colunas da matriz e $\det(M) = 0 \rightarrow \leftarrow$
Logo $f_1, \dots, f_n$ é L.I.

($\Rightarrow$) Agora suponha $\{f_1, \dots, f_n\}$ é L.I.
Defina
$$F : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

?

Exercício 15)

Seja $a_1 f_1 + \dots + a_n f_n = 0$
Diferenciando ambos os lados, obtemos
$$a_1 f_1' + \dots + a_n f_n' = 0$$
$$a_1 f_1'' + \dots + a_n f_n'' = 0$$

Isto é, para cada $x \in U$,

$$\begin{cases} a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0 \\ a_1 f_1'(x) + \cdots + a_n f_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ a_1 f_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & & f_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}}_{A(x)} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponha que $\exists\, x_0 \in U$ tal que $W(f_1, \ldots, f_n) \neq 0$. Então a matriz $A(x_0)$ é inversível e logo

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = A(x_0)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isto é, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ $\therefore$ $f_1, \ldots, f_n$ são L.I.

Observe que não vale a recíproca:

Considere

$f_1, f_2 : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x \cdot |x|$

Então

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} x^2 & x \cdot |x| \\ 2x & \begin{cases} -2x, & x<0 \\ 2x, & x>0 \end{cases} \end{vmatrix} = \begin{cases} -2x^3 + 2x^3 \\ 2x^3 - 2x^3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases} \Rightarrow W(f_1, f_2)(x) = 0$$

Mas se $a_1 x^2 + a_2 x \cdot |x| = 0$

Tomando

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow \\ x = -1 &\Rightarrow \end{aligned} \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Isto é, f_1 e f_2 são L.I.

Exercício 16)

Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_1^*, \dots, v_n^*\}, \{w_1, \dots, w_n\}, \{w_1^*, \dots, w_n^*\}$ dois sistemas de bases duais

Assim

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(w_j)\, v_i \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} w_i^*(v_j)\, w_i, \quad j = 1, \dots, n$$

$$w_j^* = \sum_{i=1}^{n} w_j^*(v_i)\, v_i^*, \quad j = 1, \dots, n$$

$$v_j^* = \sum_{i=1}^{n} v_j^*(w_i)\, w_i^*, \quad j = 1, \dots, n$$

Assim

$$\Delta^* \otimes \Delta(w_1^*, \dots, w_n^*, w_1, \dots, w_n) =$$
$$= \Delta^*(w_1^*, \dots, w_n^*) \cdot \Delta(w_1, \dots, w_n)$$

$$= \Delta^*\left(\sum w_1^*(v_i) v_i^*, \dots, \sum w_n^*(v_i) v_i^*\right) \cdot$$
$$\Delta\left(\sum v_i^*(w_1) v_i, \dots, \sum v_i^*(w_n) v_i\right)$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} w_j^*(v_{\sigma(j)})\right) \Delta^*(v_1^*, \dots, v_n^*) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} v^*_{\sigma(j)}(w_j)\right) \Delta(v_1, \dots, v_n)$$

Note que

$$\underbrace{\Delta^*(w_1^*, \dots, w_n^*)}_{\Downarrow} = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \prod w_j^*(v_{\sigma(j)})$$

$$\Delta(v_1^*, \dots, v_n^*)$$

$$\Delta^*(w_1^*, \dots, w_n^*)\,\Delta(w_1, \dots, w_n) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \prod w_j^*(v_{\sigma(j)})$$

$$\Delta(v_1^*, \dots, v_n^*)\,\Delta(w_1, \dots, w_n)$$

E

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \prod w_j^*(v(\sigma(j)))$$

$$\Delta(w_1, \dots, w_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta(v_1, \dots, v_n)\,\Delta(v_1^*, \dots, v_n) = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \prod w_j^*(v_{\sigma(j)})$$

$$\Delta(v_1^*, \dots, v_n^*)\,\Delta(w_1, \dots$$

Logo há igualdade $\square$

Exercício 13)

a)

Note que a maior potência de x em $V_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$ é $n-1$, logo $\deg(p) \leq n-1$.
Além disso, note que substituindo x por a_i, $i = 1, \ldots, n-1$, temos duas colunas da matriz iguais e logo o determinante é zero, isto é, $p(a_i) = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n-1$, logo $x - a_i \mid p$, $\forall i = 1, \ldots, n-1$.
Segue que $\deg(p) = n-1$ e

$$p = c \cdot (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_{n-1})$$

Além disso, como

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & x^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

temos que o

coeficiente de x^{n-1} é dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \cdot x^k$$

Logo

$$P(x) = V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$$

Porém é possível mostrar que

$$V_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

Logo

$$P(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j) \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i)$$

De fato, vale p/ $n=2$, pois

$$V_2(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Suponha que vale para $n-1$. Então

$$V_n(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n & a_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1^{n-1}-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1}-a_n^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1-a_n & \cdots & & 0 \\ (a_1^2-a_n^2)-(a_1a_n-a_n^2) & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_1^{n-1}-a_n^{n-1})-(a_1^{n-2}a_n-a_n^{n-1}) & & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1-a_n & & & \\ a_1(a_1-a_n) & & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= (a_1 - a_n) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} - a_n) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & & & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-2} & \cdots & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}_{V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})}$$

Hip

$$= \prod_{j=1}^{n-1} (a_j - a_n) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \quad \square$$

Exercício 7)

Note que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1-a_1 & a_1-a_1 & \cdots & a_1-a_1 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_2-a_2 & & a_2-a_2 \\ \vdots & a_2-a_1 & a_3-a_2 & & a_3-a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & & \vdots \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \cdots & a_n-a_{n-1} \end{vmatrix} = *$$

Mas $a_i - a_{i-1} = \sum_{k=1}^{i} k - \sum_{k=1}^{i-1} k = i$

Logo

$$= * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & 3 & & & \\ \vdots & \vdots & 3 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercício 9) ?

(Dimensão finita???)

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V_1, $\{w_1, \dots, w_m\}$ base de V_2

Então $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ é base de V

Dadas $f_i : V_i \to V_i$, ponha

$$f(v) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

onde $v = u_1 + u_2$, $u_i \in V_i$

Assim, se M_i é a matriz de f_i, temos

$$[f] = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

e logo $\det([f]) = \det M_1 \cdot \det M_2$

$= \det [f_1] \times \det [f_2]$

Exercício 12)

De fato, seja $A \in M_n(\mathbb{Z})$ com $\det(A) = \pm 1$. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

e $\operatorname{adj}(A)$ tem coeficientes dados por funções polinomiais das entradas de A, segue que $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$.

Reciprocamente, se $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, então $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Mas

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Logo $\det(A) = \det(A^{-1}) = 1$ ou $\det(A) = \det(A^{-1}) = -1$. $\square$

Exercício 10)

Lema: $\det \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{= A_n} = (-1)^{n-1}$

Provemos por indução em n.
Note que vale para $n = 1$.
Suponha que vale para $n-1$.
Então

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \det(A_{n-1})$$
$$= (-1)(-1)^{n-2}$$
$$= (-1)^{n-1}$$

Hipótese de indução

Logo vale para $n \in \mathbb{N}$.
Agora, provemos a afirmativa por indução novamente. É claro que esta vale para $n=2$. Agora, suponha que vale para $n-1$.
Agora

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & 0 & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\det\left(M_{n-1}\right) + (-1)\det\left(A_{n-1}\right)$$

onde $M_n = (1 - \delta_{ij})_{n\times n}$.

Assim, pela hipótese de indução e o lema

$$= (-1)(-1)^{(n-2)}(n-2) + (-1)(-1)^{(n-2)}$$

$$= (-1)^{n-1}(n-2+1) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Logo vale para todo n.

Obs:

Note que

$$\det(M_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

Mas $\prod a_{\sigma(j)j} = 0$ se $\sigma(i) = i$, p/ algum i, logo

$$\det(M_n) = \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)\neq i,\forall i}} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot 1$$

$$\Rightarrow (-1)^{(n-1)}(n-1) = \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(i)\neq i,\forall i}} \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Exercício 16)

b)

Sejam $\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \longrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$

$\{\overline{v}_1^*, \dots, \overline{v}_n^*\} \longrightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$

Pares de bases duais. Considere

$\{v_1^* + \overline{v}_i^*, \dots, v_n^*\} \longrightarrow \{w_1, \dots, w_n\}$

Qual a relação entre elas?

Suponha

$$e_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \begin{cases} v_i^*(e_1) = 0, & i = 2, \dots, n \\ v_i^*(e_1) = ? & \text{por def.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 = v_1^*(e_1)\, v_1$$

$$e_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Rightarrow \begin{cases} \beta_i = v_i^*(e_2) = 0 & i = 3, \dots, n \\ \beta_2 = v_2^*(e_2) = 1 \\ \beta_1 = v_1^*(e_2) = ? \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_2 = v_1^*(e_2)\, v_1 + v_2$$

$$\vdots$$

$$e_n = v_1^*(e_n)\, v_1 + v_n$$

$$\therefore \{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{v_1^*(e_1) v_1, v_1^*(e_2) v_1 + v_2, \dots, v_1^*(e_n) v_1 + v_n\}$$

Análogamente,

$$\{w_1, \dots, w_n\} = \{v_1^*(w_1)\, v_1,\ v_1^*(w_2)\, v_1 + v_2, \dots,$$
$$\dots, v_1^*(w_n) \cdot v_1 + v_n\}$$

Onde $(v_1 + \overline{v}_1^*)(w_1) = 1$

$$\Rightarrow v_1^*(w_1) + \overline{v}_1^*(w_1) = 1$$
$$v_1^*(w_1) = 1 - \overline{v}_1^*(w_1)$$

Logo
$$\Delta^*(v_1^*, \dots, v_n^*) = \frac{1}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

$$\Delta^*(\overline{v}_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*) = \frac{1}{\Delta(e_1, \dots, e_n)} = \frac{v_1^*(e_1)^{-1}}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

Análogamente

$$\Delta^*(v_1^* + \overline{v}_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*) = \frac{(v_1^*(w_1))^{-1}}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

Somando temos

$$\Delta^*(v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*) + \Delta^*(\overline{v}_1^*, \dots, v_n^*) = \left(\frac{v_1^*(e_1)+1}{v_1^*(e_1)}\right)\frac{1}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

Escrevendo w_1 na base $\{e_1, \dots, e_n\}$

$w_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$\Rightarrow \alpha_i = v_i^*(w_1) = 0, \quad i = 2, \dots, n$

$\alpha_1 = \overline{v}_1^*(w_1)$

$\Rightarrow w_1 = \overline{v}_1^*(w_1) e_1$

$\Rightarrow v_1^*(w_1) = \overline{v}_1^*(w_1) v_1(e_1)$

$= (1 - v_1^*(w_1)) \cdot v_1^*(e_1)$

$\Rightarrow v_1^*(w_1) + v_1(e_1) v_1^*(w_1) = v_1^*(e_1)$

$\Rightarrow v_1^*(w_1) = \dfrac{v_1^*(e_1)}{1 + v_1^*(e_1)} \Rightarrow v_1^*(w_1)^{-1} = \dfrac{1 + v_1^*(e_1)}{v_1^*(e_1)}$

e segue a linearidade da soma.

Agora considere as bases duais:

$\{v_1^*, \dots, v_n^*\} \longleftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$

$\{\lambda v_1^*, \dots, v_n^*\} \longleftrightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$

Escrevendo $e_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

temos $\begin{cases} v_i^*(e_1) = \alpha_i = 0, & i = 2, 3, \dots, n \\ v_1^*(e_1) = ? \end{cases}$

Assim
$$e_1 = v_1^*(e_1)$$

$$e_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_i^*(e_2) = 0, & i = 3, \dots, n \\ v_2^*(e_2) = 1 \\ v_1^*(e_2) = ? \end{cases}$$

Assim $e_2 = v_1^*(e_2) v_1 + v_2$

Analogamente,

$\vdots$

$$e_n = v_1^*(e_n) v_1 + v_n$$

Assim

$$\Delta(\lambda v_1^*, \dots, v_n) = \frac{1}{\Delta(e_1, \dots, e_n)}$$

$$= \frac{1}{\Delta(v_1^*(e_1) v_1, v_2, \dots, v_n)}$$

$$= \frac{v_1^*(e_1)^{-1}}{\Delta(v_1, \dots, v_n)} \quad (*)$$

Mas $\lambda v_1^*(e_1) = 1 \Rightarrow v_1^*(e_1) = \frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow (*) = \frac{\lambda}{\Delta(v_1, \dots, v_n)}$$

$$= \lambda \Delta^*(v_1^*, \dots, v_n^*) \quad \square$$

c) $\Delta^* \boxtimes \Delta (v_1^*, \dots, v_n^*, u_1, \dots, u_n) =$

$\Delta^*(v_1^*, \dots, v_n^*) \Delta(u_1, \dots, u_n) =$

$$\frac{1}{\Delta(v_1, \dots, v_n)} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j=1}^{n} v^*_{\sigma(j)}(u_j) \, \Delta(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \begin{vmatrix} v_1^*(u_1) & \cdots & v_1^*(u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n^*(u_1) & \cdots & v_n^*(u_n) \end{vmatrix}$$

Exercício 11)

($\Rightarrow$)

Provemos por indução em n.

Para o caso $n=1$, temos

$\{f_1\}$ é L.I. $\Rightarrow f_1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, x$ tq $f(x) \neq 0$ ok

Suponha que vale para $n-1$.

Sejam $\{f_1, \dots, f_n\}$ L.I. $\Rightarrow \{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ é L.I.

Pela hipótese de indução,

$\exists\, x_1, \dots, x_{n-1}$ tais que

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & f_2(x_{n-1}) & \cdots & f_{n-1}(x_{n-1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

Defina a função $f: X \to \mathbb{K}$ por

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & f_n(x_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_1(x_{n-1}) & \cdots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_n(x_{n-1}) \\ f_1(x) & \cdots & & f_n(x) \end{vmatrix} = \det(A)$$

Calculando f por cofatores na n-ésima linha, temos que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+j} f_j(x) \cdot \det(A_{nj})$$

onde note que $\det(A_{nj})$ independe de x

Assim

$$f(x) = \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{n} \underset{\mathbb{K}}{\underset{\uparrow}{(-1)^{n+j}}} \underset{\mathbb{K}}{\underset{\uparrow}{\det(A_{nj})}} f_j \Big)}_{\in \text{span}\{f_1,\dots,f_n\}}(x), \forall x \in X$$

Ou seja, $f = \sum (-1)^{n+j} \det(A_{nj}) f_j$

então f é combinação linear do conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$ que é L.I. e pelo menos um coeficiente é $\neq 0$, a saber: $\det(A_{nn}) \neq 0$ pela hipótese de indução).

Segue que $f \neq 0$, i.e: $\exists x_n \in X$ tal que $f(x_n) \neq 0$.

Tomando $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$, segue. $\square$

Tome $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

e a base $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \right\}$

Então

Então $L_A(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$

$$= a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2$$

$$L_A(e_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a_{12} \cdot e_1 + a_{22} e_2$$

$$L_A(e_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} e_3 + a_{21} \cdot e_4$$

$$L_A(e_4) = a_{12} e_3 + a_{22} \cdot e_4$$

Assim $[L_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$

Logo $\det(L_A) = \det(A)^2$

Análogo para $M_n(\mathbb{K})$ $\not z$