Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada

Lista 6: Operadores diagonalizáveis

Exercício 1. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$

a. Mostre que P_A é um polinômio mônico de grau n.

b. Prove ainda que $P_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Exercício 2. Decida se o operador linear $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

a. $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

b. $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

c. $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Exercício 3. Prove que

a. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são autovalores de T então $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ são os autovalores de T^k.

b. Seja V um e.v. sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e seja $T : V \to V$ um operador linear. Prove que α é um autovalor de $p(T)$ se e somente se $\alpha = p(\lambda)$ para algum λ autovalor de T.

Exercício 4. Prove que o polinômio característico da transposta de um operador T^t coincide com o polinômio característico de T.

Exercício 5. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim \operatorname{Im}(T) = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores.

Exercício 6. Sejam $T, S : V \to V$ operadores lineares. Suponha que v é autovetor de T e de S associado aos autovalores λ_1, λ_2 de T e S, respectivamente. Ache um autovetor e um autovalor de:

a. $\alpha S + \beta T$ onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b. $S \circ T$

Exercício 7.

a. Mostre que se $B, M \in M_n(\mathbb{K})$ com M invertível, então $(M^{-1}BM)^n = (M^{-1}B^nM)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b. Calcule A^n, $n \in \mathbb{N}$ onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$.

c. Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Dado $n \in \mathbb{N}$ determine $B \in M_3(\mathbb{C})$ tal que $B^n = A$

Exercício 8. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ calcule A^{2020}. Agora seja $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ consegue calcular B^{2020}? Dica: Pela divisão euclideana de x^k por P_B temos que $x^k = P_B(x)q_k(x) + r_k(x)$ onde $r_k = 0$ ou $\deg(r_k) < \deg(P_B)$. Encontre r_k.

Exercício 9. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\mathscr{B} = \{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\}$ e $\mathscr{C} = \{x^2, x, 1\}$. Mostre que T é diagonalizável.

Exercício 10. Em $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considere as funções $f_1(x) = e^{2x}\sin(x)$, $f_2(x) = e^{2x}\cos(x)$ e $f_3(x) = e^{2x}$, o subespaço $S = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ e o operador linear $D : S \to S$ definido por $D(f) = f'$. Determine:

a. A matriz de D em relação à base $\mathscr{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de S.

b. Os autovalores de D e as funções de S que são autovetores de D.

Exercício 11. Seja $T : V \to V$ ($\dim V < \infty$) um operador diagonalizável cujos autovalores têm multiplicidade algébrica 1.

a. Prove que qualquer operador $G : V \to V$ tal que $GT = TG$ pode ser representado como um polinômio em T.

b. Prove que a dimensão do espaço vetorial formado por tais operadores (operadores que comutam com T) é igual a dimensão de V.

Exercício 12. Sejam $S, T : V \to V$ operadores diagonalizáveis que comutam. Então eles são simultaneamente diagonalizáveis, i.e. existe uma base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathscr{B}$ consiste de autovetores de S e de T.

Exercício 13. Sejam V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ um operador linear. Suponha que T comuta com todo operador diagonalizável. Prove que T é um múltiplo escalar da identidade.

Exercício 14. Seja $m \in \mathbb{R}$ e A a matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Encontre os autovalores de A.

b. Para que valores de m a matriz A é diagonalizável?

c. Determine, de acordo com os diferentes valores de m, o polinômio minimal de A.

Exercício 15. Fixemos um vetor não nulo $a \in \mathbb{R}^3$ e defina a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T(v) = a \times v$ (produto vetorial).

a. Prove que T é uma transformação linear.

b. Determine os autovalores e autovetores de T.

Exercício 16. Considere uma matriz real simétrica A de ordem 3 com determinante igual a 6. Suponha que $u = (4, 8, -1)$ e $v = (1, 0, 4)$ sejam autovetores desta matriz associados aos autovalores 1 e 2, respectivamente. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a. Os autovalores de A são apenas 1 e 2.

b. O produto vetorial $u \times v$ é autovetor de A.

c. O vetor $(5,8,3)$ é autovetor de A.

d. A pode não ser diagonalizável.

Exercício 17. Prove que se $T : V \to V$ é um operador linear, então $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ são subespaços T-invariantes. Se λ for um autovalor de T então $\mathrm{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante.

Exercício 18. Prove que a soma e a intersecção de subespaços T-invariantes é T-invariante.

Exercício 19. Prove que se um operador $T \in \mathscr{L}(V)$ com $\dim V < \infty$ é um isomorfismo então T e T^{-1} possuem os mesmos subespaços invariantes. Vale em dimensão infinita?

Exercício 20. Mostre que se todo subespaço de V for T-invariante então $T = \lambda\,\mathrm{Id}$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercício 21. Mostre que $W \subseteq V$ é um subespaço invariante para $T \in \mathscr{L}(V)$ se e só se W^0 é T^t-invariante.

Exercício 22. Sejam $T, G : V \to V$ operadores que comutam. Mostre que $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Aut}_T(\lambda)$ são G-invariantes.

Exercício 23. Sejam V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V = n$, $T : V \to V$ um operador linear, $W \subseteq V$ um subespaço T-invariante. Mostre que $p_{T|_W} \mid P_T$ e $m_{T|_W} \mid m_T$. Dica: lembre que se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é diagonal por blocos

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

onde $B \in M_k(\mathbb{K})$ e $D \in M_{n-k}(\mathbb{K})$, então $A^n = \begin{pmatrix} B^n & \widetilde{C} \\ 0 & D^n \end{pmatrix}$.

Exercício 24. Sejam $T : V \to V$ um operador linear, $W \subseteq V$ um subespaço. Então W é $p(T)$-invariante para todo polinômio $p \in \mathbb{K}[x]$ se e somente se W for T-invariante.

Exercício 25. Seja $\pi : V \to V$ um operador projeção não trivial (i.e., $\pi \neq 0_{\mathscr{L}(V)}$ e $\pi \neq \mathrm{Id}_V$) mostre que $m_\pi = x^2 - x$.

Exercício 26. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Se o polinômio característico de uma transformação linear $T : V \to V$ é $x^2 - x - 1$, então é correto afirmar que:

a. T não é necessariamente inversível.

b. T é inversível e $T^{-1} = T + I$.

c. Não existe T com tal polinômio característico.

d. T é inversível e $T^{-1} = T - I$.

e. T é inversível, mas nenhuma das fórmulas para a inversa de T nos outros itens é válida.

Exercício 27. Seja $T \in \mathscr{L}(V)$.

a. Mostre que $T : V \to V$ é um operador linear não injetor se e somente se 0 é um autovalor de T.

b. Mostre que T é inversível se e somente se o termo independente de seu polinômio minimal é não-nulo.

c. Nestas circunstâncias, T^{-1} é um polinômio em T, i.e., existe $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{K})$ tal que $T^{-1} = p(T)$.

Exercício 28. Seja A uma matriz complexa tal que $A^k = I$ para algum inteiro k. Prove que A é diagonalizável.

Exercício 29. Prove que uma matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$ que satisfaz $A^3 = A$ pode ser diagonalizada.

Exercício 30. Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com polinômio característico P_T dado. É possível concluir que algum deles é necessariamente diagonalizável?

a. $p_T(x) = (x-3)^3(x-2)^2$

b. $p_T(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

c. $p_T(x) = (x-1)^m$, $m \geq 1$

Exercício 31. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e seja $T : V \to V$ um operador. Prove que T é nilpotente se e somente se todos os seus autovalores forem iguais a zero.

Exercício 32. Seja V um e.v. sobre um corpo $\mathbb{K}$ algebricamente fechado e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ os autovalores de T e $q(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_r)$. Mostre que $q(T)$ é nilpotente. Qual o índice de nilpotência?

Exercício 33. Dado T, G operadores lineares num espaço n-dimensional sobre um corpo de característica zero. Assuma que $T^n = 0$, $\dim\ker T = 1$ e que $GT - TG = T$. Prove que os autovalores de G são da forma $\alpha, \alpha-1, \alpha-2, \dots, \alpha-(n-1)$ para algum $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercício 34. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ um operador linear. Então $T = T_1 \oplus T_2$ (de forma única) onde T_1 é nilpotente e T_2 é um isomorfismo.

Exercício 35. Seja $T : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Mostre que T não se escreve como soma direta de um operador nilpotente com um isomorfismo.

Exercício 36. Seja $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ um operador com polinômio característico $p_T(x) = (x-\lambda)^n$. Mostre que o operador $T' = \lambda\,\mathrm{Id} - T$ é nilpotente.

Exemplo 37. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de dimensão finita e $T : V \to V$ um operador linear. Se $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$ mostre que ou T é diagonalizável ou T é nilpotente.

Exercício 38. Se V é um $\mathbb{C}$-e.v. de dimensão finita e $T : V \to V$ é um operador linear mostre que $T^{n+1} = T$ se e somente se $T^{2n} = T^n$ e T diagonalizável.

Exercício 39. Para V espaço vetorial real de dimensão finita, uma involução em V é um operador linear $\varphi : V \to V$ tal que $\varphi^2 = \mathrm{Id}$. Dado um operador linear $T : V \to V$, sejam

$$\mathrm{Fix}(T) = \{x \in V : T(x) = x\} \quad \text{e} \quad A(T) = \{x \in V : T(x) = -x\}$$

chamados subespaço de pontos fixos de T e subespaço antipodal de T, respectivamente. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a. Se φ é uma involução, então $\det(\varphi) = 1$.

b. $\mathrm{Fix}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \ker(\varphi_1 - \varphi_2)$.

c. Se λ é autovalor de uma involução, então $\lambda = \pm 1$.

d. Se φ_1, φ_2 são involuções, então $\varphi_1 \circ \varphi_2$ é também uma involução.

e. $A(\varphi) = \mathrm{Im}(I - \varphi)$.

Exercício 40. [Densidade de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ e uma aplicação] O objetivo desse exercício é mostrar que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ e quaisquer matrizes $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ e $B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ os polinômios característicos P_{AB} e P_{BA} satisfazem a seguinte relação:

$$(-1)^m x^m \cdot P_{AB}(x) = (-1)^n x^n \cdot P_{BA}(x).$$

Em particular, para matrizes quadradas A e B temos que $P_{AB}(x) = P_{BA}(x)$. Também, segue que, a menos de $\lambda = 0$, AB e BA têm os mesmos autovalores, com a mesma multiplicidade.

a. Mostre que o resultado vale para A invertível (e logo $n = m$).

b. Mostre que $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ é denso em $M_n(\mathbb{C})$ com sua topologia usual.

c. Deduza que o resultado é válido para $n = m$ com A não necessariamente invertível.

d. Deduza que o resultado é válido para quaisquer $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

e. O resultado é valido se considerarmos os polinômios minimais m_{AB} e m_{BA}de AB e BA?

Exercício 1)

Provemos por indução em n.
Se $n=1$, temos

$$P_A = \det(XId - A) = \det(X-a)$$
$$= X - a$$

Logo vale para $n=1$.
Suponha que vale para $n-1$.
Então se $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, temos

$$P_A = \det(XId - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & X-a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & X-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (X-a_{11}) \begin{vmatrix} X-a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & X-a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & X-a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & X-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & X-a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & X-a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

Note que $\det A_{11} = P_{A_{11}}$ e logo $\deg(\det A_{11}) = n-1$. Além disso, todas as outras matrizes tem no máximo $(n-2)$ entradas com o coeficiente X, e logo o único termo que aparece o grau n é

$$X \cdot \det(A_{11})$$

Mas como $\det(A_{11})$ é mônico por hipótese, segue que P_A também o é e vale para todo n ▫

b) Seja $P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

Note que

$$a_0 = P_A(0) = \det(XId - A|_{x=0}) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

Veja que se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, então

$$P_A(x) = (X-a_{11})(X-a_{22}) - a_{12}a_{21} = X^2 - (a_{11}+a_{22})X + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Logo $a_{2-1} = a_1 = tr(A)$ e vale p/

$n=2$. Suponha que vale para $n-1$.
Agora, por ✡ note que todos os determinantes envolvem no máximo $n-2$ termos com x além do primeiro, isto é,

$$= (x-a_{11}) \begin{vmatrix} x-a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & \cdots & & x-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \det(xId - A_{11})x - a_{11} \cdot \det(xId - A_{11}) \quad (*)$$

Mas $\det(xId - A_{11})$ é o polinômio característico de A_{11}, logo, pela hipótese de indução

$$\det(xId - A_{11}) = x^{n-1} - tr(A_{11})x^{n-2} + \cdots + a_0$$

Logo

$$(*) = x^n - tr(A_{11})x^{n-1} - a_{11}x^{n-1} - a_{11}tr\,x^{n-2} + \cdots + a_0 x - a_{11}a_0$$

$$= x^n - (tr(A_{11}) + a_{11})x^{n-1} - a_{11}tr(A_{11})x^{n-2} \cdots$$

$$= x^n - tr(A)x^{n-1} + \cdots$$

Logo $a_{n-1} = -tr(A)$. $\square$

Exercício 2)

a) $P_T = \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-2)(x-1)+3$

$= x^2 - x - 2x + 2 + 3 = x^2 - 3x + 5$

$= \left(x - \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\right)$

Logo $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$ e é diagonalizável

Pois $1 \leq mg(\lambda_{1,2}) = ma(\lambda_{1,2}) = 1$.

(b) $P_T = \begin{vmatrix} x+4 & +1 \\ -4 & x \end{vmatrix} = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Logo $\lambda = -2$ e $\begin{pmatrix} 2x & 1y \\ -4x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ \Downarrow \\ y = -2x \end{cases}$

Logo $Aut_T(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ não é diagonalizável, pois $mg(-2) = 1 < 2 = ma(-2)$

(c) $P_T = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 2 \\ -4 & x+1 & 2 \\ -10 & 5 & x+3 \end{vmatrix} = (x-6)\left((x+1)(x+3) - 10\right)$

$-3\left(-4(x+3) + 20\right) +$

$+ 2\left(-20 + 10x + 10\right)$

$$P_T = (x-6)(x^2+4x+3\overset{-7}{\overbrace{-10}}) - 3(-4x - \overset{8}{\overbrace{12+20}}) + 20x - 20$$
$$= x^3 + 4x^2 - 7x - 6x^2 - 24x + \underline{42} + 12x - 24 + 20x - 20$$
$$= x^3 + 4x^2 + x - 2$$

Exercício 3)

a) De fato, se λ_j é autovalor de T, então $\exists\, 0 \neq v_j \in V$ tal que $T v_j = \lambda_j v_j$

Mas aí

$$T^k v_j = T^{k-1}(\lambda_j v_j) = T^{k-2}(\lambda_j^2 v_j) = \dots = \lambda_j^k v_j$$

Isto é, λ_j^k é autovalor de T^k e v_j é autovetor associado a este.

b) Suponha que $\alpha = p(\lambda)$, onde λ é autovalor de T. Então $\exists\, 0 \neq v \in V$, $Tv = \lambda v$.

Assim

$$p(T)v = p(\lambda)v = \alpha v$$

Logo α é autovalor de $p(T)$.

Reciprocamente, suponha que α é autovalor de $p(T)$.

Então $\exists\, c \neq 0$ tal que

$$p(x) - \alpha = (x-r_1)\dots(x-r_n)$$

Em particular, $p(r_i) - \alpha = 0$, $\forall r_i$

Assim se v é autovetor associado a α, temos

$$0 = (p(T) - \alpha Id)v =$$

$$= (T - r_1 Id) \cdot \ldots \cdot (T - r_n Id)v = 0 \quad (A)$$

que implica $(T - r_i Id)u = 0$, p/ algum $u \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$ (c.c. o lado esquerdo seria $\neq 0$ em A.

Logo r_i é autovalor de T e $p(r_i) = \alpha$.

Exercício 4)

De fato, $P_T = \det(xId - T)$

$$= \det((xId - T)^t)$$

$$= \det(xId - T^t)$$

$$= P_{T^t}$$

Exercício 5)

De fato, para cada autovalor λ_j de T é possível termos $\mathcal{B}_j = \{v_j\}$ um conjunto

$j = 1, \dots, n$

unitária contendo autovetores associados. Segue do resultado visto em sala
que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ é L.I.
Suponha que $Tv_j \neq 0$, $\forall j = 1, \dots, r$.
Então

$$T(\mathcal{B}) = \{\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n\}$$

Mas $\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I. $\Rightarrow \lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n$
L.I.

Mas note que $\lambda_j v_j \in Im(T)$, $\forall j$ logo temos $r \leq m$ e logo T possui m autovalores distintos.
Se $\exists\, j$ tal que $Tv_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$ é autovalor de T.
Eliminando todos os autovetores associados a 0 de $\mathcal{B}$, chegamos no caso anterior e logo T tem no máximo outros m autovalores. Mas isso implica que T tem no máximo $m+1$ autovalores.

Exercício 7)

Note que

$$(\alpha S + \beta T)v = \alpha \lambda_2 v + \beta \lambda_1 v$$
$$= (\alpha \lambda_2 + \beta \lambda_1) v$$

Logo $\alpha\lambda_2+\beta\lambda_1$ é autovalor do $\alpha S+\beta T$

c) $(S\circ T)(v)=S(\lambda v)=\lambda Sv=\lambda^2 v$

Logo λ^2 é autovalor de $S\circ T$

Exercício 7)

a) De fato, vale p/ n=1. suponha que vale para n-1.

Então

$$(M^{-1}BM)^n=(M^{-1}BM)^{n-1}(M^{-1}BM)$$
$$=(M^{-1}B^{n-1}M)(M^{-1}BM)$$
$$=M^{-1}B^nM$$

Exercício 9

Temos $T(x^2)=\frac{1}{2}x^2$ $T(1)=-1/2$

$T(x)=-1/2x$

Assim $[T]_{can}^{can}=\begin{pmatrix}-1/2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$

Exercício 10)

Temos $D(f_1) = 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) + e^{2x}\cos(x)$

$= (2, 1, 0)_{\mathcal{B}}$

$D(f_2) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\operatorname{sen}(x)$

$= (-1, 2, 0)_{\mathcal{B}}$

$D(f_3) = 2e^{2x}$

$= (0, 0, 2)_{\mathcal{B}}$

Logo

a) $[D]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$-x + y = 0$
$-x - y = 0$

$\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $P_D = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)\left((x-2)^2 + 1\right) =$

$= (x-2)(x^2 - 4x + 4 + 1)$

$= (x-2)(x^2 - 4x + 5)$

$=$

Logo os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e etc..

Exercício 11) / Ex 12

Seja $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ base de autovetores de T. Então

$$TGv_j = GTv_j = G\lambda_j v_j = \lambda_j G v_j$$

Logo $Gv_j \in \ker(\lambda_j Id - T)$.
Como $ma(\lambda_j)=1 \Rightarrow mg(\lambda_j)=1$ e logo
$Gv_j = \beta_j v_j$, para algum $\beta \in \mathbb{K}$
Logo todo autovetor de T é autovetor de G e logo G é diagonal na base $\mathcal{B}$

Suponha então $T=diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ e $G=diag(\beta_1,\dots,\beta_n)$. Como os λ_j's são distintos, considere os polinômios:

$$L_j(x) = \prod_{i\neq j} \frac{x-\lambda_i}{\lambda_j-\lambda_i} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$$

Note que $L_j(\lambda_i)=\delta_{ij}$
Assim

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j L_j(x)$$

Satisfaz $p(\lambda_j)=\beta_j$, $\forall j$
Logo

$$p(T) = diag(p(\lambda_1),\dots,p(\lambda_n)) = G$$

b) Agora, uma vez que $P_T(T)=0$, e $P_T \neq 0$, temos que $\{Id, T, \dots, T^n\}$ é L.D. (pois P_T tem grau n), logo a dimensão dos operadores que são pol. em T é menor ou igual a n.

Agora, note que, se $T=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, temos que $Id, T, T^2, \dots, T^{n-1}$ são todos L.I.

De fato, provemos que vale p/ $n=2$.

Se $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, então $\{Id, T\}$ é L.I. pois

$a_1 Id + a_2 T = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2\lambda_1 & 0\\ 0 & a_2\lambda_2\end{pmatrix}$

$\begin{cases} a_0 + a_1\lambda_1 = 0 \\ a_0 + a_1\lambda_2 = 0\end{cases}$ $p(x)=a_0+a_1x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2\lambda_1 \\ a_1 = a_2\lambda_2\end{cases}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

Ex15) Seja $a=(a_1, a_2, a_3)$

Então para cada $v=(v_1, v_2, v_3)$,

a) $T(v) = a \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} = (a_2v_3 - a_3v_2, a_3v_1 - a_1v_3, a_1v_2 - a_2v_1)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}}_{= A}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3\end{pmatrix} = Av$$

Logo é linear

b) $P_A = \begin{vmatrix} x & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & x & a_1 \\ a_2 & -a_1 & x \end{vmatrix} = x(x^2+a_1^2) - a_3(-a_3 x - a_1 a_2) - a_2(a_3 a_1 - a_2 x)$

$$= x^3 + a_1^2 x + a_3^2 x + \cancel{a_1 a_2 a_3} - \cancel{a_1 a_2 a_3} + a_2^2 x$$

$$= x^3 + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x$$

$$= x(x^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

Logo seus autovalores são $\lambda = 0$
Além disso, como $a \times \lambda a = \vec{0}$, temos que $v = a$ é autovetor.

Exercício 16)

A simétrica, $\det(A) = 6$

$Au = u$, $Av = 2v$

$P_A(x) = (x-1)(x-2)\,q(x)$

Como $P_A(x) = x^3 - tr(A)x^2 + a_1 x + det(A)$
temos

$$(x-1)(x-2)\underbrace{q(x)}^{(x-\alpha)} = P_A(x)$$

$\Rightarrow 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$

Logo $\alpha = 3$ é autovalor de A também.
Logo ⓐ é falsa, além disso ⓑ é falsa,
pois $mg(\lambda_j) = ma(\lambda_j) = 1$, $j = 1, 2, 3$.

Ex25)

De fato, temos que π projeção $\Rightarrow \pi^2 = \pi$
ou seja, $\pi^2 - \pi = 0$
Logo se $p(x) = x^2 - x$, temos $p(\pi) = 0$,
i.e: $m_\pi | p$
Logo $m_\pi(x) = x^2 - x$ ou x ou $x - 1$
Mas, $m_\pi(x) = x \Rightarrow m_\pi(\pi) = \pi = 0 \Rightarrow \pi \equiv 0$
$\rightarrow\leftarrow$

E $m_\pi(x) = x - 1 \Rightarrow \underset{=}{0} m_\pi(\pi) = \pi - Id \Rightarrow \pi = Id$
$\rightarrow\leftarrow$

Logo $m_\pi(x) = x^2 - x$. $\square$

Ex26) Note que se $p(x) = x^2 - x - 1$, então
Por Cayley-Hamilton, $p(T) = 0$. ∴

$$T^2 - T - Id = 0$$
$$\Leftrightarrow T^2 - T = Id$$
$$\Leftrightarrow T(T - Id) = Id$$
$$\Leftrightarrow T - Id = T^{-1}$$

Logo apenas ⓓ é válida.

Exercício 27)

a) De fato T não é injetora $\Leftrightarrow \exists v \neq 0,\ Tv = 0$
$\Leftrightarrow \exists v \neq 0,\ Tv = 0v$
$\Leftrightarrow$ 0 é autovalor de T

b) De fato, como $a_0 = det(T)$, T é inversível se e só se $a_0 \neq 0$.

c) Temos $P_T(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 Id = 0$

$$\Rightarrow T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1 T = -a_0 Id$$

$$\Rightarrow T(T^{n-1} + a_{n-1}T^{n-2} + \ldots + a_1 Id) = -a_0 Id$$
$$\Rightarrow T \cdot \left(-\frac{1}{a_0}T^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}T^{n-2} + \ldots + -\frac{a_1}{a_0}Id\right) = Id$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{a_0}T^{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0}T^{n-2} + \ldots + -\frac{a_1}{a_0}Id = T^{-1}$$

$\Rightarrow T^{-1}$ é polinômio em T $\blacksquare$

Ex 28)

Note que neste caso se $P(x) = X^k - 1$, temos $p(A) = 0$ e logo $m_A \mid X^k - 1$

Mas $(X^k - 1) = (X - e^{\frac{2\pi i}{k}})(X - e^{\frac{2\pi i 2}{k}}) \cdots (X - e^{\frac{2\pi i (k-1)}{k}})$

Logo m_A tem apenas termos lineares e logo A é diagonalizável

Exercício 30)

Temos que (b) é diagonalizável, pois $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) = 1$, $\Rightarrow m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$, p/ todo λ autovalor de T.

Exercício 31)

Suponha $A^k = 0$ e $v \neq 0$ autovetor de A. Então

$$0 = A^k v = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda^k v$$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow$ único autovalor de A é 0.

Reciprocamente, suponha que o único autovalor de A é 0. Então $P_A = X^k$, p/ algum $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assim por Cayley-Ham. segue que $P_A(A) = A^k = 0$ $\therefore$ A é nilpotente

$\blacksquare$

Exercício 29)

Note que se $P(X) = X^3 - X = X(X^2-1)$, temos $= X(X+1)(X-1)$

que $P(A) = A^3 - A = 0 \Rightarrow m_A \mid X$

Logo m_A tem apenas termos lineares e é diagonalizável.

Exercício 36

De fato, por Cayley-Hamilton temos que $P_T(T) = 0$, isto é, $0 = P_T(T) = (T - \lambda Id)^n$
$= (-1)^n (\lambda Id - T)^n$

$\Rightarrow (\lambda Id - T)^n = 0 \Rightarrow (T')^n = 0$ ▫

Exercício 33)

Note que T^n, assim $(GT - T \cdot G)^n = 0$

Além disso, se $0 \neq v \in \ker T$, temos

$$(GT - TG)v = 0$$
$$\Rightarrow GT(v) = TG(v)$$
$$\Rightarrow G(0) = T\,G(v)$$
$$\Rightarrow 0 = T\,G(v)$$

Logo $G(v) \in \ker T$. Como $\dim \ker T = 1$ segue que $G(v) = \alpha v$ p/ algum $\alpha \in \mathbb{K}$ e logo v é autovetor de G.
c/ autovalor α

??

Exercício 32

Como $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são autovalores de T, $\exists\, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tais que

$$m_T = (X-\lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X-\lambda_r)^{n_r}$$

Seja $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$.

Então

$$q(T)^n = (T-\lambda_1 Id)^n \cdot \ldots \cdot (T-\lambda_r Id)^n (v)$$

$$= (T-\lambda_1 Id)^{n-n_1} \cdot \ldots \cdot (T-\lambda_r Id)^{n-n_r} (T-\lambda_1 Id)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (T-\lambda_r Id)^{n_r} (v)$$

$$= (T-\lambda_1 Id)^{n-n_1} \cdot \ldots \cdot (T-\lambda_r Id)^{n-n_r} \underbrace{m_T(T)(v)}_{0}$$

$= 0$

Logo $q(T)^n = 0$, onde $n = \max\{n_1, \dots, n_r\}$

Exercício 17)

De fato, seja $v \in \ker T \Rightarrow Tv = 0$

Mas então $T(Tv) = T(0) = 0 \therefore Tv \in \ker T$

Seja $v \in \operatorname{Im} T \Rightarrow v = Tu$, p/ $u \in V$.

Assim $Tv = TTu = T(Tu)$, com

$Tu \in V \Rightarrow Tv \in \operatorname{Im} T \therefore T(\operatorname{Im} T) \subset \operatorname{Im} T$

Além disso, se λ é autovalor de T, então

Como $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ é subespaço e

$$Tv = \lambda v \in \operatorname{Aut}_T(\lambda)$$

P/ cada $v \in \operatorname{Aut}_T(\lambda)$, então $\operatorname{Aut}_T(\lambda)$ é invariante.

Ex. 18)

Sejam $V_1, V_2 \subset V$ subespaços T-inv.

Então se $v = v_1 + v_2 \in V_1 + V_2$, temos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(v_1 + v_2) \\ &= Tv_1 + Tv_2 \end{aligned}$$

Mas $T(V_1) \subset V_1$ e $T(V_2) \subset V_2 \Rightarrow Tv_1 \in V_1, Tv_2 \in V_2$

e logo $T(v) \in V_1 + V_2 \Rightarrow T(V_1 + V_2) \subset V_1 + V_2$

Além disso, se $v \in V_1 \cap V_2$ então claramente $T(v) \in V_1$ e $T(v) \in V_2 \Rightarrow T(v) \in V_1 \cap V_2$

e portanto $T(V_1 \cap V_2) \subset V_1 \cap V_2$

Ex 19) Seja $W \subset V$, $T(W) \subset W$, $\dim W = m$. Então $T|_W : W \to T(W)$ é isomorfismo e portanto $\dim W = \dim T(W)$. Como $T(W) \subset W \Rightarrow T(W) = W$ e assim $T^{-1}(W) = W$ $\therefore$ W é T^{-1}-invariante.

Se $\dim V = \infty$, isso não é verdade: seja $V = l^1(\mathbb{Z})$, $e_j = (\dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ a base canônica e considere $T: V \to V$ dado por $Te_j = e_{j+1}$, $W = \operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$.
Então $T(W) = \operatorname{span}\{T(e_0), T(e_1), \dots, T(e_n), \dots\}$
$= \operatorname{span}\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\} \subset W$
Mas $T(W) \subsetneq W$, pois $e_0 \in W \setminus T(W)$.

Ex 20)
De fato, se $\dim V = 1$, não há o que provar. Suponha $\dim V \geq 2$. Então para cada $v \in V$, $\exists \lambda_v$ tal que
$$Tv = \lambda_v v$$
(Pois $Tv \in \langle v \rangle$). Assim, suponha $\exists u, v \in V$, $\lambda_u \neq \lambda_v$. Então
$$T(u+v) = Tu + Tv \Rightarrow \lambda_{u+v}(u+v) = \lambda_u u + \lambda_v v$$

$\Rightarrow (\lambda_{u+v} - \lambda_u) u + (\lambda_{u+v} - \lambda_v) v = 0$

Como $\lambda_u \neq \lambda_v \Rightarrow \lambda_{u+v} \neq \lambda_u$ ou $\lambda_{u+v} \neq \lambda_v$
logo u e v são L.D.
Assim, se u, v são L.I., temos $\lambda_u = \lambda_v$
Mas isso implica que se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}_{i \in I}$
é base de V, então $T v_i = \lambda v_i$, $\forall i \in I$,
isto é, $T = \lambda Id$.

Exercício 21)

Suponha que W é T invariante e seja $\varphi \in W^0$. Então se $w \in W$, temos

$$T^t(\varphi)(w) = \varphi(Tw) = 0$$

Pois $Tw \in W$ e $\varphi \in W^0$. Logo $T^t(\varphi) \in W^0$ e logo W^0 é T^t invariante.
Reciprocamente, suponha W^0 é T-inv. e que W não é T-invariante. Então $\exists w \in W$ tal que $T(w) \notin W$.
Tome base $\{w\} \cup \mathcal{B}$ de V e defina $\varphi : V \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(Tw) = 1$ e $\varphi(v) = 0$, $\forall v \in \mathcal{B}$. Como $T(w) \notin W \Rightarrow W \subset \langle \mathcal{B} \rangle$ e logo $\varphi \in W^0$, porém

$(T^t\varphi)(w) = \varphi(Tw) = 1 \neq 0$, logo $T^t\varphi \notin W^0$, contradição. Segue que W é T-invariante $\square$

Exercício 22)

De fato, se $v \in \ker T$, então

$$TGv = GTv = G0 = 0$$

logo $Gv \in \ker T \Rightarrow G(\ker T) \subset \ker T$

Além disso, se $v = Tu \in \operatorname{Im} T$, então

$$Gv = GTu = T(Gu)$$

logo $Gv \in \operatorname{Im} T \Rightarrow G(\operatorname{Im} T) \subset \operatorname{Im} T$

Agora, se $v \in \operatorname{Aut}_T(\lambda)$, $Tv = \lambda v$ $\therefore$

$$TGv = GTv = G\lambda v = \lambda Gv$$

logo $Gv \in \operatorname{Aut}_T(\lambda) \Rightarrow G(\operatorname{Aut}_T(\lambda)) \subset \operatorname{Aut}_T(\lambda)$

$\square$

Ex 23)

Seja $W \subset V$ T-inv, tome $\{w_1, \dots, w_m\}$ base de W e complete-a $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ base de V. Então a matriz de T é, da forma

na base $\{w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Ou seja, $p_T = \begin{vmatrix} XId_m - A & B \\ 0 & XId_{n-m} - C \end{vmatrix}$

Além disso, note que $T|_W = [A]_{\mathcal{B}}$, logo $p_{T|W} = p_A = \det(XId - A)$

Uma vez que

$$p_T = \det(XId - A)\det(XId - C)$$

segue que $p_{T|W} \mid p_T$

Note que se $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow T^n = \begin{pmatrix} A^n & \tilde{B} \\ 0 & C^n \end{pmatrix}$

p/ alguma $\tilde{B}$, logo para qqer $p \in K[x]$

$$p(T) = \begin{pmatrix} p(A) & \tilde{B} \\ 0 & p(B) \end{pmatrix}$$

Assim,

$$0 = m_T(T) = m_T \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_T(A) & \tilde{B} \\ 0 & m_T(C) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m_T(A) = 0 \Rightarrow m_A \mid m_T \Rightarrow m_{T|W} \mid m_T$$

Exercício 24)

Suponha W é $p(T)$ invariante, p/ todo $p \in \mathbb{K}[x]$. Tomando $p(x) = x \in \mathbb{K}[x]$, temos $p(T) = T$, logo W é T invariante. Reciprocamente, suponha W T invariante e seja $w \in W$.
Então se $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$, temos que

$$p(T)w = (a_0 Id + a_1 T + \ldots + a_n T^n) w$$
$$= a_0 w + a_1 T w + \ldots + a_n T^n w$$

Mas $T(W) \subset W \Rightarrow T^j(W) \subset W$, isto é, $T^j w \in W$ $\forall j = 0, 1, 2, \ldots, n$. Assim $p(T) w \in W$ e W é $p(T)$ invariante $\square$

Exercício 3 4)

AF: $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$

De fato, note que se $v \in \ker(T^k)$, então $T^{k+1} v =$
$= T(T^k v) = T(0) = 0$, logo $v \in \ker(T^{k+1})$
e $\ker(T^k) \subseteq \ker(T^{k+1})$

Suponha $\ker(T^k) \subsetneq \ker(T^{k+1})$.
Então $\dim\ker(T^{k+1}) > \dim\ker(T^k)$
Repetindo o argumento obtemos
que ou $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$ ou então

$r = \dim\ker(T) < \dim\ker(T^2) < \dots < \dim\ker(T^j)$

Mas como $\ker(T^k) \subseteq V$, $\forall k$, temos
$\dim\ker T^k \leq n$ ⚡

Logo $\exists k$.

Note que $V = \ker(T^k) + \mathrm{Im}(T^k)$
pois dado $v \in V$, temos que $T^k v \in \mathrm{Im}(T^k)$
e $v - T^k v$

?

Ec 35) $\circledast$ ↓ ↓↓

Ec 36)

De fato, por Cayley-Hamilton sabemos que $P_T(T') = 0$, i.e.: $(T - \lambda Id)^n = 0$

Mas daí

$$T'^n = (\lambda Id - T)^n = (-1)^n (T - \lambda Id)^n = 0$$

Logo T' é nilpotente.

Ec 37)

Seja $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ base de V com $\mathcal{B}' = \{a_2, \dots, a_n\}$ base de $\ker(T)$

(Note que $\dim \ker(T) = n - 1 = n - \dim Im(T)$)

onde

$T(e_1) = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$

Então

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ c_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Se $c_1 = 0$, então $T^2 = 0$, pois

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2 = 0$$

- Por outro lado, se $c_1 \neq 0$, então é fácil ver que

$$P_T(x) = x^{n-1}(x - c_1)$$

E como

$$T \cdot (T - c_1 Id) = 0$$

Logo $m_T = x(x - c_1)$ é produto de fatores lineares e logo T é diagonalizável

Ex 39)

a) Falsa: tome $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Então $\det(T) = -1$, mas $T^2 = Id$

b) Se $x \in \ker(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Assim $\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_1(\varphi_1(x)) = x$

e logo $x \in Fix(\varphi_1 \circ \varphi_2)$

Reciprocamente, se $x \in Fix(\varphi_1 \circ \varphi_2)$, então

$\varphi_1(\varphi_2(x)) = x \Rightarrow \varphi_1(\varphi_1(\varphi_2(x))) = \varphi_1(x)$

Mas $\varphi_1^2 = Id \Rightarrow \varphi_2(x) = \varphi_1(x) \Rightarrow x \in \ker$

$(\varphi_1 - \varphi_2)$

c) De fato se v é autovetor de φ, então

$$v = \varphi^2(v) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$$

$$= \lambda^2 v$$

$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda \in \{-1, +1\}$

d) Falsa: $\varphi_1(x,y) = (y,x)$

$\varphi_2(x,y) = (-x, y)$

e)

Tome $x \in A(\varphi) \Rightarrow x = -\varphi(x)$

Mas

$$x = \frac{x}{2} - \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$= (\mathrm{Id} - \varphi)\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ex 40)

a) De fato daí $A^{-1}(AB)A = BA$, logo AB e BA são similares e tem mesmo det e logo mesmo pol.

Ex 38)

Suponha que $T^{n+1} = T$

Então se $p(x) = x^{n+1} - x$, temos $p(T) = T$

$\Rightarrow p(x) = x(x^n - 1) = x(x - e^{\frac{2\pi i}{n}})(x - e^{\frac{2\pi i \cdot 2}{n}}) \dots (x - e^{\frac{2\pi i n}{n}})$

Como $m_T \mid p(x) \Rightarrow m_T$ é produto de fatores lineares $\Rightarrow T$ é diagonalizável

Além disso

$$T^{n+1} = T \Rightarrow T^{2n} = T^n$$

Reciprocamente, suponha $T^{2n} = T^n$ e T é diagonalizável. Então se $p(x) = x^{2n} - x^n$, $p(T) = 0$

$$= x^n(x^n - 1)$$

Como $m_T \mid p$ e T é diagonalizável segue que

$$m_T(x) = x$$

$$\text{ou } m_T(x) = (x^n - 1)$$

$$\text{ou } m_T(x) = x(x^n - 1)$$

Mas se $m_T(x) = x \Rightarrow m_T(T) = 0 \Rightarrow T = 0$ logo é claro que $T^{n+1} = T$

Se $m_T(x) = x^n - 1$, $m_T(T) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T^n - Id = 0 \Rightarrow T^n = Id$
Logo $T^{n+1} = T$

Finalmente, se $m_T(x) = x(x^n - 1)$, então

$$m_T(T) = 0 \Rightarrow T(T^n - Id) = 0$$

$$\Rightarrow T^{n+1} = T \quad \square$$

Ex 8)

Note que $P_B = (X-2)^2(X-1)$

Mas

$$X^k = P_B \cdot q_k + r_k, \quad r_k = 0 \text{ ou } \deg(r_k) < 3$$

Assim

$$B^k = \underbrace{\cancel{P_B(B)}}_{0} \cdot q_k(B) + r_k(B)$$
$$= r_k(B)$$

Mas $r_k = a_k X^2 + b_k X + c_k$

Mas

$$\begin{aligned} 2^k &= r_k(2) \\ 1^k &= r_k(1) \\ k\,2^{k-1} &= r_k'(2) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 4a_k + 2b_k + c_k = 2^k \\ a_k + b_k + c_k = 1 \\ 4a_k + b_k = k2^{k-1} \end{cases}$$

Assim

$$B^{2020} = a_{2020} B^2 + b_{2020} B + c_k I_d$$

$$\begin{cases} 3a_k + b_k = 2^k - 1 \\ 4a_k + b_k = k2^{k-1} \end{cases} \Rightarrow a_k = k2^{k-1} - 2^k + 1$$
$$= 2^{k-1}(k-2) + 1$$

$$\Rightarrow b_k = (2^k - 1) - 3 \cdot 2^{k-1}(k-2) - 3$$
$$= 2^{k-1}(2 - 3(k-2)) - 4$$

$$\Rightarrow c_k = \cancel{1} - 2^{k-1}(k-2) - \cancel{1} - 2^{k-1}(2 - 3(k-2)) + 4$$

$$\Rightarrow C_k = 4 - 2^{k-1}\left(2-3(k-2)+1\right)$$
$$= 4 - 2^{k-1}(3-3k+6)$$
$$= 4 - 2^{k-1}(9-3k)$$

Logo $B^{2020} = 2^{2019}\cdot(2018) + 1\cdot B^{2} +$

Ex 13)

AF: Todo vetor não nulo é autovetor de T

Dems)

De fato, suponha que $\exists\, v$ tal que $Tv \neq \lambda v, \forall \lambda$.
Assim, $\{v, Tv\}$ é L.I.
Complete base $\mathcal{B} = \{v, T\} \cup \mathcal{B}'$ de V e defina $G: V \to V$, linear, pondo

$$\begin{cases} Gv = v \\ GT(v) = v \\ Gw = 0, \forall w \in \mathcal{B}' \end{cases}$$

Então note que $[G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Assim

$$P_G = \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & & 0 \\ 0 & x & & \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & x \\ 0 & & & & x \end{vmatrix} = (x-1)x^n$$

Mas $m_G = (x-1)x$, pois

$$(G - Id)G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & -1 & & \\ \vdots & 0 & -1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Logo G é diagonalizável.

Porém $GT(v) = v \neq Tv = TGv$
Contradição.
Logo $Tv = \lambda_v v$, $\forall v \in V \Rightarrow T = \lambda Id$. $\square$

Ex 12)

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalores distintos de S. Então existe base ordenada $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ de V tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_k I_{n_k})$$

Onde $|\mathcal{B}_i| = n_i$ é a dimensão do autoespaço associado a λ_i

Note que se $v_j \in Aut_S(\lambda_j)$, então

$$STv_j = TSv_j = \lambda_j Tv_j$$

isto é, $Tv_j \in Aut_S(\lambda_j)$, ou seja,

$$T(Aut_S(\lambda_j)) \subset Aut_S(\lambda_j)$$

Isso implica que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

de $A_j \in M_{n_j \times n_j}(\mathbb{K})$

Agora. Se $V_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle = Aut_S(\lambda_i)$, então $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.
Seja $T_i = T|_{V_i}$. Como $m_T(T_i) = 0$, $m_{T_i} \mid m_T$. Mas T diagonalizável $\Rightarrow$
$\Rightarrow m_T$ é produto de fatores lineares $\Rightarrow$
$\Rightarrow m_{T_i}$ é produto de fatores lineares e logo cada T_i é diagonalizável. Seja $\mathcal{B}_i'$ base de V_i de autovetores de T_i. Então cada $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$ é diagonal e $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1' \cup \dots \cup \mathcal{B}_k'$ é base de V e

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \operatorname{diag}\left([T_1]_{\mathcal{B}_1'}, \dots, [T_k]_{\mathcal{B}_k'}\right)$$

é diagonal. Além disso, para cada $x \in V_i$ $Sx = \lambda_i x \Rightarrow [S]_{\mathcal{B}'} = [S]_{\mathcal{B}}$ e S e T são diagonais. $\square$

Ex 16)

F ⇝ Não, pois considerando o fecho algébrico temos que $\det(A) = \prod \lambda_j$, autovalores de A. Mas daí $\lambda = 3$ é autovalor

V

F

F

b) Sim, pois $u \times v \perp u$, $u \times v \perp v$ e logo Mas também se w é autovetor associado a 3 $w \perp u$ e $w \perp v \Rightarrow w = \alpha u \times v$

Ex 33)

$\exists v, \; T^{n-1}(v) \neq 0$ *

$T^{n-1}(v) \in \ker T$

$$GT(T^{n-1}(v)) - TG(T^{n-1}(v)) = T^n(v) = 0$$

$$\Rightarrow TG(T^{n-1}(v)) = 0 \Rightarrow G(T^{n-1}(v)) = \alpha T^{n-1}(v)$$

$$GT\,T^{n-2}(v) - TGT^{n-2}(v) = T\,T^{n-2}(v)$$

$$\hookrightarrow GT^{n-1}(v) - TGT^{n-2}(v) - T^{n-1}(v) = 0$$

$$\doteq \alpha T^{n-1}(v) - TGT^{n-2}(v) - T^{n-1}(v) = 0$$

$$(\alpha-1)T^{n-1}(v) - TG(T^{n-2}(v)) = 0$$

$$\Rightarrow T\underbrace{\left((\alpha-1)T^{n-2}(v) - GT^{n-2}(v)\right)}_{\in \ker T} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\alpha-1)T^{n-2}(v) - G(T^{n-2}(v)) = \beta T^{n-1}(v)$$

$$\Rightarrow G(T^{n-2}(v)) = (\alpha-1)T^{n-2}(v) - \beta T^{n-1}(v)$$

Assim $$[G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 0 \\ & & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & \alpha-1 & 0 \\ & & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdots \to [G]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha+(n-1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

* $\dim \operatorname{Im} T = n-1$

Seja $T' = T|_{\operatorname{Im}(T)}$. Como $\ker T' \subset \ker T$, $\dim \ker T' \leq 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} T' \geq n-2$, logo $T^2 \neq 0$.

Procedendo assim obtemos $T^i \neq 0$, p/ $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ex 4)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - x + 1 & x-1 \\ -x^3 + x^2 & x^2-1 \\ \hline -x+1 & \end{array}$$

Temos $p_A = x^3 - x^2 - x + 1 \Rightarrow P_A = (x^2+1)(x-1)$
$= (x-1)(x+1)(x-1)$
$= (x-1)^2(x+1)$

a)

Logo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$

Ainda:

$$\begin{pmatrix} (1 - \overbrace{(1+m)}^{=m}) & -(1+m) & -1 \\ m & 1+m & 1 \\ -m & 1-m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} -mx - (1+m)y - z = 0 \\ mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx \quad (1-m)y \quad z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2y + 2z = 0 \Rightarrow y = -z$$

$\Rightarrow mx + (1+m)(-z) + z = 0$
$\Rightarrow mx = mz$
$\Rightarrow x = z$ se $m \neq 0$

Logo $\dim \ker \mathrm{Aut}_2(1) = 1$ se $m \neq 0$
$= 2$ se $m = 0$

b)

Logo é diag. para $m = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $m = 0$, a matriz é diagonalizável, logo m_A é prod. de fatores lineares e logo

$$m_A = (X-1)(X+1)$$

Já para $m \neq 0$, como esta não é diag. devemos ter

$$m_A = (X-1)^2(X+1) = p_A$$

Ex 21 $\Leftarrow$ ALTERNATIVO

$\Leftarrow$: W^0 é T^t-inv. $\Rightarrow$ W é T-invariante

Dado $f \in W^0 \Rightarrow T^t(f) \in W^0$

$$\Rightarrow T^t(f)(w) = 0,$$

$$\Rightarrow f(T(w)) = 0$$

$$\Rightarrow T(W) \subset \ker f, \ \forall f \in W^0$$

$$\Rightarrow T(W) \in \bigcap_{f \in W^0} \ker f \overset{(*)}{=} W \ \therefore \ T(W) = W$$

Queremos ver que

$$\bigcap_{f \in W^0} \ker f = W$$

Se $w \in W \Rightarrow f(w) = 0, \ \forall f \in W^0$

$$\Rightarrow w \in \bigcap_{f \in W^0} \ker f$$

$$\Rightarrow W \subset \bigcap_{f \in W^0} \ker f$$

• Seja, $v \notin W$
$v \neq 0$

Seja $B' = \{w_i\}_{i \in W}$ base de $W \subset \langle w_i, i \in I \rangle$

$\Rightarrow v \notin \langle w_i, i \in I \rangle$

completamos

$\Rightarrow B' \cup \{v\}$ é L.I $\Rightarrow B' \cup \{v\} \cup \{v_j\}$. base de V

Considere $f : V \to \mathbb{K} \Rightarrow f \in W^0$ e $v \notin \ker f$

$$\begin{aligned} v &\mapsto 1 \\ w_i &\mapsto 0 \\ v_j &\mapsto 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow v \notin \bigcap_{f \in W^0} \ker f$$

$$\Rightarrow W^c \subset \left(\bigcap_{f\in W^0} \ker f\right)^c$$

$$\Rightarrow \bigcap_{f\in W^0} \ker f \subset W$$

$$\Rightarrow W = \bigcap_{f\in W^0} \ker f \quad (*)$$

Ex 40)

d) Suponha $n > m$

Sejam

$$A \in M_{n\times m}(\mathbb{C}),\ B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$$

Define

$$\tilde{A} = (A \,\vdots\, 0)_{n\times n} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

Daí sabemos que $P_{\tilde{A}\tilde{B}} = P_{\tilde{B}\tilde{A}}$

Mas

$$P_{\tilde{A}\tilde{B}} = \det(xId_n - \tilde{A}\tilde{B}) = P_{AB}$$

Pois

$$\tilde{B}\tilde{A} = \left(\begin{array}{c:c} BA & 0 \\ \hdashline 0 & 0_{n-m} \end{array}\right)$$

Mas $P_{\tilde{B}\tilde{A}} = X^{n-m} P_{BA}$

Assum

$$P_{AB} = X^{n-m} P_{BA}$$

$$\Rightarrow X^m P_{AB} = X^n P_{BA}$$

(*) Ec 35) Considere $T: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$p(t) \mapsto t \cdot p(t)$

$W_2 = \{ p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}):$

Seja $S = \{ n \in \mathbb{N} : \exists p \in W_2 \text{ tq } \deg(p) = n \}$

Logo, $\exists q \in W_2$ de menor grau

Logo $\exists$ $p \in W_2$ tq

$$X \cdot p = T_2(p) = q$$

$$\Rightarrow \deg(p) + 1 = \deg(q)$$

$$\Rightarrow \deg(p) < \deg(q) \rightarrow\leftarrow$$

Temos $T_2 : W_2 \to W_2$ é inversível, $T_2 \neq 0$

Seja $s = \min\{1^\circ$ coordenada ñ nula de $p \mid p \in W_2\}$

Seja $q \in W_2$ tal que a s-ésima coord. de q é ñ nula. Então se

$$Tu = q$$

$\Rightarrow$ $s-1$ ésima posição de u seria ñ nula, contradição com a minimalidade de q $\square$