Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada
Lista 7: Forma Racional e de Jordan

Exercício 1. Seja $\{T_i : i \in I\}$ um subconjunto de $\mathscr{L}(V)$ onde V é um e.v. de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{K}$. Suponha que $T_iT_j = T_jT_i$ para todo $i, j \in I$. Mostre que V pode ser escrito como soma direta de autoespaços generalizados comuns a todos os $T_i, i \in I$.

Exercício 2. Considere o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ache a decomposição primária de $\mathbb{R}^3$ e encontre bases para cada um desses subespaços T-invariantes.

Exercício 3. Seja $A \in M_6(\mathbb{R})$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16I_6 = 0$. Quais são as possíveis formas de Jordan não semelhantes para A?

Exercício 4. Seja $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p(x+1)$.

a. Determine a forma de Jordan de T.

b. Para $n = 4$, encontre uma base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}_4(\mathbb{R})$ tal que $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = J$.

Exercício 5. Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

veja que $p_A = p_B = p_C = p_D = (x-2)^4$. Determine a forma de Jordan de cada uma.

Exercício 6. Dados um polinômio $f(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\dots(x-\lambda_k)^{d_k}$ e um espaço vetorial V com $\dim V = n = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$. Quantos operadores $T : V \to V$ com $p_T = f$ existem?

Exercício 7. Ache todas as formas de Jordan possíveis para uma transformação linear com polinômio característico $P_T = (x-2)^3(x-1)^2(x-5)$. Ache o polinômio minimal correspondente a cada uma dessas formas de Jordan.

Exercício 8. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z, w) = (3z + w, 2x + 2y - 4z, z + w, 3w - z)$$

a. Encontre a base e a forma de Jordan de T.

b. Descreva todos os subespaços T-invariantes.

Exercício 9. Seja T um operador linear no $\mathbb{K}$-e.v. V de dimensão finita. Suponha que $m_T = (x - \lambda_1)^{m_1}\dots(x-\lambda_k)^{m_k}$, mostre que existe um operador diagonalizável $D \in \mathscr{L}(V)$ e um operador nilpotente $N \in \mathscr{L}(V)$ tal que

a. $T = D + N$,

b. $DN = ND$.

Prove ainda que os operadores D e N são univocamente determinados por a e b e cada um deles é um polinômio em T.

Exercício 10. A seguinte afirmação é falsa ou verdadeira: se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz com entradas complexas de ordem n é tal que $A^4 = I_n$ então

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

pode ser um bloco de Jordan de A.

Exercício 11. Seja $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ um operador linear com polinômios característico e minimal dados, respectivamente, por $P_T = (x-2)^4(x-1)^2$ e $m_T = (x-2)^2(x-1)^2$. Além disso suponha que $\dim\ker(T - 2\,\mathrm{Id}) = 2$. Nestas condições encontre a forma de Jordan de T. Com os polinômios característico e minimal acima é possível supormos que $\dim\ker(T - 2\,\mathrm{Id}) = 1$?

Exercício 12.

a. Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz complexa invertível, definimos suas partes *real* e *imaginária* $R, J \in M_n(\mathbb{R})$ como sendo

$$R = \mathrm{Re}(A) \text{ e } J = \mathrm{Im}(A)$$

de forma que $A = R + iJ$. Mostre que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R + \lambda_0 J$ é invertível.

b. Deduza que se duas matrizes reais $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são semelhantes em $M_n(\mathbb{C})$ então elas são semelhantes em $M_n(\mathbb{R})$.

Exercício 13. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz real satisfazendo a seguinte condição $A^3 = I_n$. Mostre que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

Exercício 14. Sejam N_1 e N_2 matrizes de ordem 6 nilpotentes. Suponha que elas têm o mesmo polinômio minimal e o mesmo posto. Prove que elas são semelhantes. Mostre que o mesmo resultado não é verdadeiro para matrizes de ordem 7.

Exercício 15. Dê a forma de Jordan de um operador linear $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ com polinômio característico $p_T(x) = (x-1)^2(x-2)^4(x-3)$ e tal que $\dim(\ker(T - 2\,\mathrm{Id}) = 2, \dim(\ker(T - \mathrm{Id})) = 1$ e $\ker(T - 2\,\mathrm{Id})^3 \neq \ker(T - 2\,\mathrm{Id})^2$.

Exercício 16. Seja $N \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz nilpotente tal que $\dim\ker(N) = k$, $0 < k < n$.

a. Mostre que $\dim\ker(N^l) \leq kl$, para todo $l \geq 1$.

b. Prove que $n \leq kr$, onde r e o é grau do polinômio minimal de N.

Exercício 17. [Forma de Jordan Real] O objetivo deste exercício é apresentar a “Forma de Jordan Real” de todo operador linear definido num espaço vetorial real. Seja V um espaço vetorial real. Defina o espaço vetorial complexo $V_{\mathbb{C}}$ como no Exercício 16 da Lista 1. Denotemos os elementos de $V_{\mathbb{C}}$ por $(x, y) = x + iy$.

a. Mostre que se $T \in \mathscr{L}(V)$, então a aplicação $T_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ dada por $T_{\mathbb{C}}(x + iy) = T(x) + iT(y)$ é um operador linear em $V_{\mathbb{C}}$.

b. Mostre que se $\mathscr{B}$ é base de V então $\mathscr{B}$ é uma base de $V_{\mathbb{C}}$. Logo $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ e $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [T_{\mathbb{C}}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$.

c. Conclua que a matriz de T é semelhante em $V_{\mathbb{C}}$ a uma matriz de Jordan.

Se o polinômio característico de um operador $T : V \to V$ fatora-se completamente em fatores lineares em $\mathbb{R}$ então a forma de Jordan usual de T é a forma de Jordan real de T. Suponha que T admita um autovalor complexo da forma $\lambda = \alpha + i\beta$ com $b \neq 0$, então sabemos que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ é também um autovalor de T (Exercício 15.2 da Lista 4).

a. Mostre que as bases dos autoespaços generalizados $V(\lambda)$ e $V(\overline{\lambda})$ podem ser escolhidas conjugadas.

b. Sejam $\mathscr{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $\overline{\mathscr{B}} = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_k}\}$ dois conjuntos de vetores LI que originam os dois blocos de Jordan $J_k(\lambda)$ e $J_k(\overline{\lambda})$ de ordem k. Denote por $v_i = \mathrm{Re}(u_i)$ e $w_i = \mathrm{Im}(u_i)$, mostre que o conjunto $\mathscr{C} = \{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_k, w_k\}$ é LI.

c. Mostre que $T(v_k) = \alpha v_k - \beta w_k$, $T(w_k) = \beta v_k + \alpha w_k$, e para $j = 1, \ldots, k-1$ tem-se $T(v_j) = v_{j+1} + \alpha v_j - \beta w_j$ e $T(w_j) = w_{j+1} + \beta v_j + \alpha w_j$, onde $\alpha = \mathrm{Re}(\lambda)$ e $\beta = \mathrm{Im}(\lambda)$. Encontre a matriz de $T\,|_{\langle \mathscr{C} \rangle}$.

d. Conclua que existe uma base B de V tal que $[T]_B^B$ é diagonal por blocos e as matrizes na diagonal são da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & & & & & & & & \\ -\beta & \alpha & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \alpha & \beta & & & & & & \\ 0 & 1 & -\beta & \alpha & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \alpha & \beta & & & & \\ & & 0 & 1 & -\beta & \alpha & & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & \alpha & \beta \\ & & & & & & 0 & 1 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

e blocos de Jordan associados a autovalores reais.

e. Encontre uma base e a forma de Jordan real para o operador $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_{\mathrm{Can}}^{\mathrm{Can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 18. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $A^2 + I_n = 0$. Prove que $n = 2k$ e que A é semelhante à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & 0 \end{pmatrix},$$

onde $I_k \in M_k(\mathbb{R})$ é a matriz identidade.

Exercício 19. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Prove que se A e B são semelhantes sobre o corpo dos números complexos, então elas são também semelhantes sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 20. Mostre que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ é semelhante à sua transposta.

Exercício 21. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V < \infty$, $v \in V$ e $T : V \to V$ um operador linear, seja $Z(v, T) = \bigcap_{W \in C(v,T)} W$ onde $C(v, T) = \{W \subseteq V \mid W$ é subespaço T-invariante e $v \in W\}$. Mostre que:

a. $Z(v, T)$ é T-invariante

b. $Z(v, T)$ é o menor subespaço de V, T-invariante que contem v.

c. $Z(v, T) = \{g(T)(v) \in V \mid g \in \mathbb{K}[x]\}$

d. $\dim Z(v, T) = 1$ se, e somente se, v é um autovetor de T.

Exercício 22. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e seja $B \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que B é semelhante sobre $\mathbb{K}$ a uma e somente uma matriz que está na forma racional.

Exercício 23. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que se existe um vetor cíclico para T^2 então existe um vetor cíclico para T. Vale a recíproca?

Exercício 24. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear com polinômio minimal $m_T(x) = p_1(x)^{m_1} \cdots p_k(x)^{m_k}$ onde os $p_i(x)$ são distintos e irredutíveis em $K[x]$. Seja $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ a decomposição de V dada pelo teorema da decomposição primária. Mostre que para todo subespaço T-invariante W de V temos que

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} (W \cap W_i).$$

Exercício 25. Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Sejam $p \in \mathbb{K}[x]$ um polinômio irredutível e m um inteiro positivo. Suponha que existe $v \in V$ tal que $p_v = p^m$. Seja $w \in Z(v; T)$.

a. Mostre que $w = q(T)p(T)^l(v)$ onde $q \in \mathbb{K}[x]$ é coprimo com p e $0 \leq l \leq m$.

b. Mostre que $Z(w; T) = Z(p(T)^l(v); T)$. Logo os únicos subespaços T-cíclicos de $Z(v; T)$ são

$$0 = Z(p(T)^m(v); T) \subset Z(p(T)^{m-1}(v); T) \subset \cdots \subset Z(p(T)(v); T) \subset Z(v; T).$$

c. Mostre que todo subespaço T-invariante de $Z(v; T)$ é T-cíclico, ou seja, é da forma $Z(p(T)^l(v); T)$ com $0 \leq l \leq m$.

Exercício 26. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$.

a. Prove que se existe um vetor cíclico para T então todo subespaço próprio T-invariante de V também tem um vetor cíclico.

b. Vale a recíproca do item a?

Exercício 27. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador diagonalizável.

a. Mostre que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, T tem n autovalores distintos.

b. Mostre que se T tem n autovalores distintos e se $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de autovetores de T, então $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ é um vetor cíclico de T.

Exercício 28. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(V)$.

a. Prove que $\operatorname{Im} T$ tem um complementar T-invariante se, e somente se, $\operatorname{Im} T \cap \ker T = 0$.

b. Se $\operatorname{Im} T \cap \ker T = 0$, prove que $\ker T$ é o único complementar de $\operatorname{Im} T$ que é T-invariante.

Exercício 29. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Encontre uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ esteja na forma racional.

Exercício 30. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Encontre vetores $v_1, \cdots, v_r$ que satisfazem as condições do Teorema da Decomposição Cíclica.

Exercício 31. Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T tem um vetor cíclico se, e somente se, a seguinte afirmação é verdadeira: "Todo operador linear que comuta com T é um polinômio em T."

Exercício 32. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que todo vetor $0 \neq v \in V$ é um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio característico de T é irredutível em $\mathbb{K}[x]$.

Exercício 33. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$. Suponha que $P_T = m_T = p^m$ é uma potência de um polinômio irredutível. Prove que nenhum subespaço não trivial T-invariante de V tem um complementar que também é T-invariante.

Exercício 34. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ um operador linear tal que x^2+3 é um divisor do polinômio minimal de T e 1 é o único autovalor de T. Quais são as possíveis formas racionais de T?

Exercício 35. Seja $T \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^6)$ com polinômio minimal $m_T(x) = (x^2-2)(x^2+1)$. Ache as possíveis formas racionais de T para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercício 36. Um operador linear T é dito *semissimples* se todo subespaço T-invariante de V tem um complemento que é também T-invariante. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e T um operador linear em V.

a. Mostre que se o polinômio minimal de T for irredutível em $\mathbb{K}$ então T é semissimples.

b. Se $\mathbb{K}$ for algebricamente fechado, prove que T é diagonalizável se, e somente se, é semissimples.

c. Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\text{Can}}^{\text{Can}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não é semissimples.

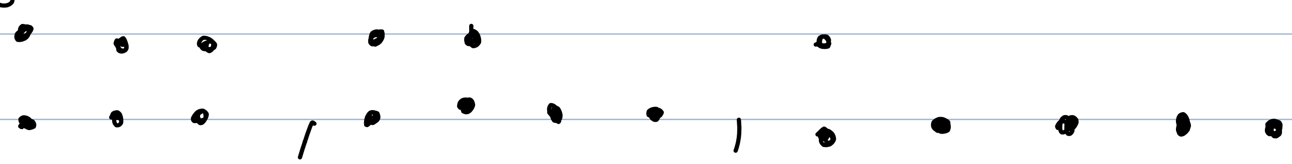
Ex 14) Primeiramente, note que como N_1 e N_2 são nilpotentes, então $p_{N_1} = X^6 = p_{N_2}$, logo $m_{N_1} = m_{N_2} = X^k$, para $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$

Note que, da minimalidade do polinômio minimal, $N_1^r \neq 0 \neq N_2^r$, $\forall r < k$ e logo k é o índice de nilpotência de N_1 e N_2.

Além disso, como o posto N_1 = posto N_2, temos, pelo teorema do núcleo e imagem que $\dim \ker N_1 = \dim \ker N_2$ e logo as matrizes de Jordan de N_1 e N_2 têm mesmo número de blocos, ou seja, os diagramas têm mesmo número de colunas.

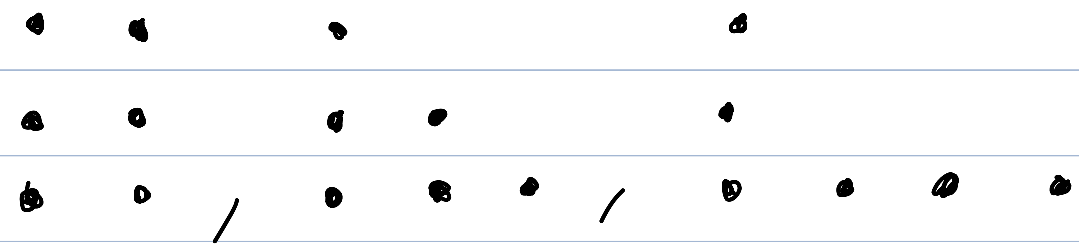
Note que matrizes semelhantes possuem mesma forma de Jordan, logo basta verificar que N_1 e N_2 têm mesma forma de Jordan

- Se o índice de nilpotência for $k=1$, temos $N_1 = 0 = N_2$.
- Se o índice de índice de nilpotência for $k=2$, os diagramas de N_1 e N_2 têm dois pontos na primeira coluna. Os únicos diagramas possíveis para N_1 e N_2 são:



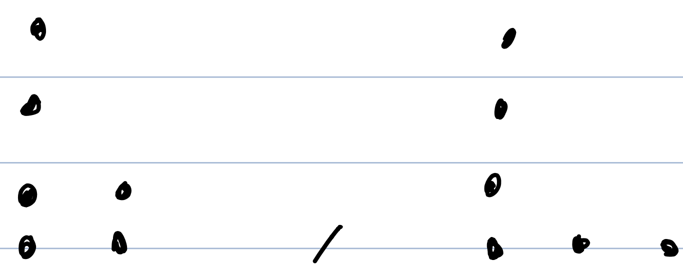
Como, pelo comentário acima, os diagramas de N_1 e N_2 têm mesmo número de colunas, segue que devem ser iguais e logo N_1 semelhante a N_2

- Se o índice de nilpotência for $k=3$, os diagramas têm 3 pontos na primeira coluna. Os únicos diagramas possíveis são



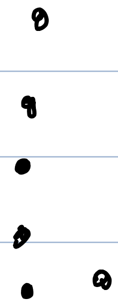
E, como antes, por terem mesmo nº de colunas devem coincidir e $N_1 \sim N_2$.

- Se o índice de nilpotência for $k=4$, os diagramas têm 4 pontos na primeira coluna. Os únicos possíveis são



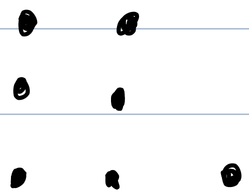
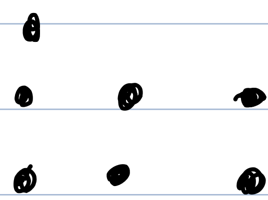
e logo $N_1 \sim N_2$, analogamente.

Se o índice for $k=5$ ou $k=6$, o único diagrama possível é

 e  , respectivamente, e logo $N_1 \sim N_2$

Logo segue que devemos ter $N_1 \sim N_2$, em qualquer caso.

No caso $M_7(\mathbb{C})$ a afirmação não é válida, pois as matrizes dadas pelos diagramas de Jordan

 e 

têm mesmo índice de nilpotência (3) e mesmo posto (4), mas formas de Jordan distintas (logo não são semelhantes). São estas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & -1 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & -1 & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right) \quad e \quad \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ex 1)

Provamos por indução em $n = \dim V$.

Se $n=1$, OK!

Suponha que vale para $n-1$ e seja $\dim V = n$.

Fixado $T_{i_0} \in \{T_i, i \in I\}$, pelo T. D. Primária podemos escrever

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores de T.

onde $W_j = V_{T_{i_0}}(\lambda_j) = \ker((T-\lambda_j Id)^{r_j})$

AF: $T_i(V_{T_{i_0}}(\lambda_j)) \subset V_{T_{i_0}}(\lambda_j)$

De fato, seja $v \in V_{T_{i_0}}(\lambda_j)$. Então $(T_{i_0}-\lambda_j Id)^{r_j}(v)=0$

Assim

$$\begin{aligned}(T_{i_0}-\lambda_j Id)^{r_j} T_i(v) &= T_{i_0} T_i(v) - \lambda_j Id\, T_i v \\ &= T_i T_{i_0}(v) - \lambda_j T_i Id\, v \\ &= T_i (T_{i_0} - \lambda_j Id) v = T(0) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_i(v) \in V_{T_{i_0}}(\lambda_j)$

Logo,

os operadores T_i se restringem a opera_

dores que comutam em $V(\lambda_j)$.
Se todo T_j for múltiplo da identidade, OK.
Se não, tome T_{i_0} tal que $T_{i_0} \neq \lambda Id$.
Então $\dim W_i < V$, $i = 1, \dots, r$ e aplicando a hipótese de indução à família

$$\{ T_i|_{Aut_T(\lambda_j)} : i \in I \}$$

obtemos decomposição em soma direta de autoespaços comuns a todos $T_i, i \in I$.
i.e:

$$\mathrm{Aut}_{T_{i_0}}(x_j) = W_1^j \oplus \dots \oplus W_{n_j}^j$$

Assim

$$V = W_1^1 \oplus \dots \oplus W_{n_1}^1 \oplus W_1^2 \oplus \dots \oplus W_{n_r}^r$$

onde cada W_i^j é autoespaço comum a todo T_i

Ex.2)

Note que $\det(X\,Id - T) = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 2 \\ 4 & x+1 & 2 \\ -10 & 5 & x+3 \end{vmatrix} =$

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$= (x-2)(x^2+1)$$

Assim

$$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$$

onde

$$W_1 = \ker(T - 2Id) = \mathrm{Aut}(2)$$
$$W_2 = \ker(T^2 + Id)$$

Note que

$$\ker(T - 2Id) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Assim $\begin{cases} 4x-3y-2z=0 \\ 10x-5y-5z=0 \end{cases}$ $\boxed{x=\frac{1}{2}z}$

Logo $\begin{cases} 20x-15y-10z=0 \\ 20x-10y-10z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=0}$

Assim $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Já

$$T^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 10 & -10 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (T^2+Id) = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo

$$\ker(T^2+Id) = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow 5x-5y=0 \Rightarrow \boxed{x=y}, \ z \in \mathbb{R}$

Logo $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ex 3) $A^4 - 8A^2 + 16\,Id = 0$ $\quad\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 8x + 16 \\ \quad = (x-4)^2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow m_A \mid x^4 - 8x^2 + 16$

$\Rightarrow m_A \mid (x^2 - 4)^2$

$\Rightarrow m_A \mid (x+4)^2 (x-4)^2$

$\Rightarrow m_A = (x+4)(x-4)$ ou $(x+4)^2(x-4)$ ou $(x+4)(x-4)^2$ ou $(x+4)^2(x-4)^2$ ou $(x+4)$ ou $(x-4)$

?? . . .

Ex 4)

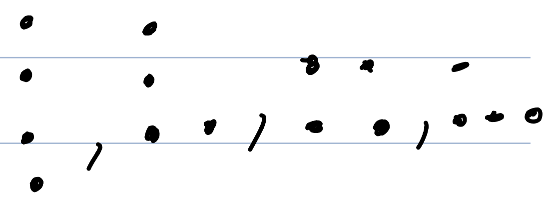
a) Note que na base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ temos

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & \binom{n}{1} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & \binom{n}{2} \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

?

Ex 5)

Temos as possíveis formas: 

Mas note que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\times 3 -$ $\qquad$ $\times 7 +$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 15x = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim\ker(A - 2Id) = 1$$

Logo $A \sim \vdots \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ 1 & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ 0 & & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\ker(B - 2Id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim\ker = 2$

Logo $B \sim \vdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\dim \ker(C - 2Id) = 3 \therefore$

$$C \sim \quad \Leftrightarrow \quad C \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Ex 7) $P_T = (X-2)^3 (X-1)^2 (X-5)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ma(2) = 3 \Rightarrow 3 \text{ pts} \rightsquigarrow \text{ ou } \text{ ou} \ldots \\ ma(1) = 2 \Rightarrow 1 \text{ pt} \rightsquigarrow \\ ma(5) = 1 \Rightarrow 1 \text{ pt} \rightsquigarrow \end{cases}$$

$\rightarrow$ $J_3(2)$ ou $J_2(2)\ J_1(2)$ ou $J_1(2)\ J_1(2)\ J_1(2)$

$\times$

$\rightarrow$ $J_2(1)$ ou $J_1(1)\ J_1(1)$

$\times$

$\rightarrow$ $J_1(5)$

$=$ Total $3 \times 2 \times 1 = 6$ possíveis formas

Correspondem aos polinômios mínimos

$(X-2)^3$ ou $(X-2)^2$ ou $(X-2)$

x

$(X-1)^2$ ou $(X-1)$

x

$(X-5)$

DIGITADO ERRADO

Ex 8)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(x\,Id - T) = \begin{vmatrix} x & -2 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot ((x-2)(x-1)(x-3)+1)$$

$$= x((x-2)(\underbrace{x^2-4x+\underbrace{3+1}_{4}}_{(x-2)^2})$$

$$=$$

$$= x(x-2)^3$$

$\Rightarrow P_T = X(X-2)^3$

$$\ker(T-2Id) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{x} \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2y \\ 3x - z - w = 0 \\ x - 4y + z + w = 0 \\ -3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2y \Rightarrow x = y \\ z + w = 3x \end{cases}$$

base de ker $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\ker(T-2Id) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Logo $\dim\ker(T-2Id) = 2$ $\quad = u_1 \quad = u_2$

Logo há 2 pts na útima linha, isto é,

•

• •

$J_2(2)$ $J_1(2)$

Logo $T \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-6+4=-2$

$(T-2Id)^2 =$ $\quad -2+3+1$ $\quad -6-3-1=-10$

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & -2 & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 & -1 & -1 \\ & & & & 1 & -4 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 2 & 0 & 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & -10 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

Além disso, $\mathcal{B}_1 = \{ (\quad) $

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note que $(T-2Id)(v_1) = u_2$

Logo

$$\begin{array}{ll} v_1 & \\ \downarrow T-2Id & \\ u_2 & u_1 \end{array}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

~~onde w é autovetor x=0~~ $1-4=-3$

$1 \ -4 \ 1 \ 1 \ | \ +2 \ -2 \ 0 \ 0$

$\ker(T-2Id)^2$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = y$

Logo

Base de $\ker(T-2Id)^2$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2 = u_1} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ex 11)

Temos $\mathbb{R}^6 = V(2) \oplus V(1)$

Como $ma(\lambda=2) = 4$, temos 4 pontos assim, associados a 2 temos o diagrama

$$\begin{array}{cc} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ J_2(2) & J_2(2) \end{array}$$

Pois $m_T = (x-2)^2 \Rightarrow$ 2 pts 1º colua e

$\dim \ker(T - 2Id) = 2 \Rightarrow$ 2 colunas

Além disso temos o diagrama

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ J_2(1) \end{array}$$

Associado a $\lambda = 1$, de modo que

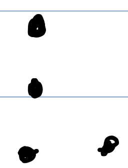
$$T \sim \left(\begin{array}{cc:cc:cc} 2 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ \hdashline & & 2 & 0 & & \\ & & 1 & 2 & & \\ \hdashline & & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right)$$

(with the off-diagonal blocks written as 0)

Não pode haver $\dim \ker(T - 2Id) = 1$, pois nesse caso teríamos 1 coluna no diagrama associado a $\lambda = 2$, e esta teria que conter os 4 pontos da base de $V(2)$, mas ao mesmo tempo ter apenas 2 pontos pois $m_T = (x-2)^2(x+1)^2$

Ex 15)

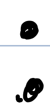
Associado a $\lambda = 2$ temos 4 pontos
Como $\dim \ker(T - 2Id) = 2$, há 2 colunas no diagrama. Como $\dim \ker(T-2Id)^3 \neq \dim \ker(T-2Id)^2$, temos que o único diagrama possível é



$J_3(2)$ $J_1(2)$

Pois daí $\dim \ker(T-2Id)^2 = 3 \neq 4 = \dim \ker(T-2Id)^3$
Além disso, $\dim \ker(T - Id) = 1$

$\Downarrow$



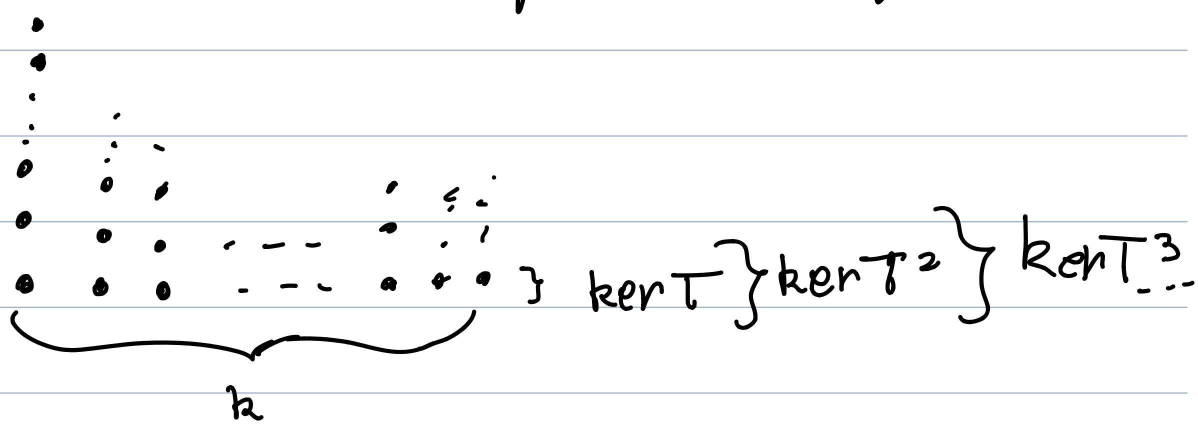
$J_2(1)$

E claramente $J_1^{\circ}(3)$
Logo

$$T \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 2 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Ex 16)

a) Note que o diagrama de Jordan de N tem k colunas, assim que é da forma



onde as l primeiras linhas correspondem aos vetores base de N^l. Assim, podem haver no máximo $k \cdot l$ pontos, i.e.: $\dim \ker(N^l) \leq k \cdot l$

b) De fato, se $m_N(x) = x^r$, então a 1ª coluna do diagrama de N tem r pontos e todas as outras tem um número menor ou igual a esta. Assim, como há um total de n pontos, devemos ter $n \leq k \cdot r$, pois há no máximo $k \cdot r$ pontos.

Ex 2)

Note que

$$P_T = \begin{vmatrix} x-6 & 3 & 2 \\ -4 & x+1 & 2 \\ -10 & 5 & x+3 \end{vmatrix} = (x-6)\big((x+1)(x+3)-10\big)$$
$$- 3(-4x-12+20)$$
$$+ 2(-20+10x+10)$$

?

$$= x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$= (x-2)(x^2+1)$$

Ex 27)

($\Rightarrow$) De fato suponha que T admite vetor cíclico então $p_T = m_T$ e T é diagonalizável se implica m_T é produto de fatores lineares isto é, todo autovalor de T é raiz simples de m_T. Mas daí, como $p_T = m_T$, temos que p_T só admite raízes simples, porém como $\deg(p_T) = n \Rightarrow p_T$ admite n raízes distintas $\Rightarrow T$ tem n autovalores distintos

($\Leftarrow$) Se T tem n autovalores distintos, então toda raiz de p_T é simples. Como $m_T | p_T$ e m_T tem as mesmas raízes de p_T, então $m_T = p_T \Rightarrow T$ admite vetor cíclico.

b)

De fato, note que

$$Tv = Tv_1 + Tv_2 + \dots + Tv_n = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$
$$T^2 v = T^2 v_1 + T^2 v_2 + \dots + T^2 v_n = \lambda_1^2 v_1 + \lambda_2^2 v_2 + \dots + \lambda_n^2 v_n$$
$$\vdots$$
$$T^{n-1} v = T^{n-1} v_1 + \dots + T^{n-1} v_n = \lambda_1^{n-1} v_1 + \dots + \lambda_n^{n-1} v_n$$

AF: $v, Tv, \dots, T^{n-1}v$ são L.I.

De fato se $a_0 v + a_1 T v + \dots + a_{n-1} T^{n-1} v = 0$

Temos

$$a_0 v_1 + a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_{n-1} \lambda_1^{n-1} v_1 +$$

$$+ a_0 v_2 + a_1 \lambda_2 v_2 + \dots + a_{n-1} \lambda_2^{n-1} v_2 +$$

$$\dots$$

$$+ a_0 v_n + a_1 \lambda_n v_n + \dots + a_{n-1} \lambda_n^{n-1} v_n = 0$$

$$= (a_0 + a_1 \lambda_1 + \dots + a_{n-1} \lambda_1^{n-1}) v_1 +$$

$$(a_0 + a_1 \lambda_2 + \dots + a_{n-1} \lambda_2^{n-1}) v_2 +$$

$$\vdots$$

$$(a_0 + a_1 \lambda_n + \dots + a_{n-1} \lambda_n^{n-1}) v_n = 0$$

Como a soma é direta, devemos ter

$$(a_0 + a_1 \lambda_i + \dots + a_{n-1} \lambda_i^{n-1}) v_i = 0$$

$i = 1, \dots, n$

Que implica no seguinte sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{V} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Porém $\det(V) \neq 0$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$, logo o sistema admite solução única, que é a trivial, i.e.: $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ e logo $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$ é L.I. $\square$

Ex28)

a) Suponha que $\operatorname{Im} T$ tem complementar T-invariante W.

Seja $w = 0 + w$, $\quad 0 \in \operatorname{Im} T$, $w \in W$

Então $Tw = T0 + Tw \Rightarrow Tw \in W$, pois W é T-invariante e $Tw \in \operatorname{Im} T$, pois $Tw = Tw$. Logo $Tw = 0$

Isto é, $W \subset \ker T$

Como $\dim W = \dim V - \dim \operatorname{Im} T$
$= \dim \ker T$

Segue que $W = \ker T \therefore \operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$

Reciprocamente, se $\operatorname{Im} T \cap \ker T = \{0\}$

Então $\ker T$ é subespaço complementar T-inv. de $\operatorname{Im} T$ $\therefore$

De fato, $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

b) Direto de (a)

Ex 32) ($\Leftarrow$)

De fato, se P_T é irredutível, então como $m_T \mid P_T \Rightarrow m_T = P_T$

Além disso, se $v \neq 0$, $P_v \mid m_T = P_T \Rightarrow$

$\Rightarrow P_v = m_T = P_v \Rightarrow v$ é vetor cíclico de T

($\Rightarrow$) Hipóteses: Todo vetor não nulo é cíclico

$\Rightarrow \exists v$ vetor cíclico $\Rightarrow m_T = P_T$

Suponha P_T redutível, i.e: $m_T = P_T = h \cdot g$ com $h, g \in \mathbb{K}[x]$; $\deg(h), \deg(g) \geq 1$

Logo $\deg(h) < n$ e h não é constante.

Em particular, $h \neq 0$.

$\Rightarrow h = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$, com $a_k \neq 0$ e $1 \leq k < n$

Sabemos que $\exists\, v \in V$ tal que $p_v = m_T = p_T$

($\Rightarrow v \neq 0$, pois $p_v \neq 1$ já que $\dim V \geq 1$ ⟹ $p_v = p_T$ tem grau $n \geq 1$)

Então $p_v(T)(v) = 0 = h(T)\,g(T)(v)$

Observe que $g(T)(v) \neq 0$, pois $\deg(g) < \deg(p_v)$

Seja $w = g(T)(v) \neq 0$

$\Rightarrow h(T)(w) = h(T)\,g(T)(v) = 0$

$\Rightarrow a_0 w + \dots + a_k T^k(w) = 0$

e os coeficientes a_i não são todos nulos

$\Rightarrow \{w, T(w), \dots, T^k(w)\}$ é L.D.

$\Rightarrow \dim(Z(w,T)) < k < n$

$\Rightarrow Z(w,T) \subsetneq V$, ou seja, $\exists$ um vetor não nulo que não é cíclico, contradição!

$\Rightarrow p_T$ é irredutível $\square$

Ex 35) $m_T = x^4 - x^2 - 2$

Sabemos que $p_{v_1} = m_T$, logo existe base $\mathcal{B}_1$ de $Z(v_1;T)$ tal que

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim Z(v_1;T) = 4 \Rightarrow \dim Z(v_2;T) = 2$

ou

$\dim Z(v_2;T) = 1$

$\dim Z(v_3;T) = 1$

Se $\dim Z(v_2;T) = 2$, como $p_{v_2} | p_{v_1}$, então

$$p_{v_2} = x^2 - 2 \text{ ou } p_{v_2} = x^2 + 1$$

No primeiro caso

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e no segundo

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

E assim

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $\dim(v_2; T) = 1$, como $P_{v_2} | P_{v_1}$, temos

$P_{v_2} = X+2$ ou $X-2$?

Ec 21)

a) De fato, seja $w \in Z(v,T)$
Então $w \in W$, $\forall W \in C(v,T)$
$\Rightarrow T(w) \in W$, $\forall W \in C(v,T)$
$\Rightarrow T(w) \in Z(v,T)$

c)
Se $w = g(T)(v)$, p/ $g \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow T(w) = p(T)(v)$
onde $p(x) = X \cdot g(X)$. Assim $\{g(T)(v) : g \in \mathbb{K}[X]\}$ é
T-invariante e logo $Z(v,T) \subseteq \{''\}$
Além disso,
se W é subespaço T-invariante que contém
v, então W contém $T^k(v)$, $\forall k$ e
portanto contém $p(T)(v)$, $\forall p \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow$
$\Rightarrow \{''\} \subseteq Z(v,T)$ ∴

d) $\dim Z(v,T) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{g(T)(v) : g \in \mathbb{K}[x]\} = \{\lambda v \,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow Tv = \lambda v$

Reciprocamente se $Tv = \lambda v$ então
$g(T)(v) = g(\lambda) v \Rightarrow$
$\{g(T)(v) : g \in \mathbb{K}[x]\} = \{\lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

$\square$

Ex 23)
Note que, claramente
$$Z(v;T^2) \subseteq Z(v;T)$$
$, \forall v \in V$.
Logo, se $\exists\, v$ tal que $V = Z(v;T^2) \Rightarrow$
$\Rightarrow V \subseteq Z(v;T) \Rightarrow Z(v;T) = V$. $\square$

Ex 33)
Seja $W \subseteq V$ não trivial e suponha que admite W' complemento invariante.
Como $m_{T|_W} \mid m_T$, $m_{T|_{W'}} \mid m_T$, temos
$m_{T|_W} = p^{m_1}$, $m_{T|_{W'}} = p^{m_2}$
Com $0 < m_1, m_2 < m$, pois os subespaços são próprios e não triviais. e $m = \dim V$
Pois $p_T = m_T$ $\qquad$ $n > \dim W < \dim V$

Seja $n = \max\{m_1, m_2\}$. Então p^n anula tanto W como W' e logo anula V.
Mas $n < m$ e p^m é o polinomio minimal $\rightarrow\leftarrow$
Logo T não admite tal decomposição.

Ex 25)

De fato, sabemos que $\exists\, g \in \mathbb{K}[x]$ tal que
$w = g(T)(v)$
Pelo alg. da divisão Euclidiana, tem que $\exists\, q$ e $r \in \mathbb{K}[x]$ tais que

$$g = s \cdot p^m + r$$

com $\deg(r) < \deg(p^m)$ ou $r = 0$
Aplicando em v, temos

$$w = g(T)(v) = S(T) \cdot \underbrace{\cancel{p^m(T)(v)}}_{0} + r(T)(v)$$

$$\Rightarrow w = r(T)(v)$$

Fatorando r em fatores irredutíveis, temos que

$$r = p^l q_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot q_n^{l_n}$$

$\Rightarrow r = p^l q$, com q e p coprimos.
Assim

$$w = q(T)\, p^l(T)(v)$$

b) De fato, $w = q(T)p(T)^{\ell}(v) \Rightarrow w \in Z(p(T)^{\ell}(v);T)$

$\Rightarrow Z(w;T) \subseteq Z(p(T)^{\ell}(v);T)$

Reciprocamente,

se $u = s(T)p(T)^{\ell}(v) \in Z(p(T)^{\ell}(v);T)$

Ex 13) Seja A matriz real tal que $A^3 = Id$.

Então se $q(x) = x^3 - 1$, temos $q(A) = 0$ logo $m_A \mid q(x)$. Sejam $1, w, w^2$ as raízes cúbicas da unidade. Então

$$m_A = (x-1)^{r_1}(x-w)^{r_2}(x-w^2)^{r_3}$$

$$\Rightarrow \quad p_A = (x-1)^{s_1}(x-w)^{s_2}(x-w^2)^{s_3}$$

$r_1, s_1, r_2, s_2, r_3, s_3 \in \mathbb{N}$.

Mas como $p_A \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow s_2 = s_3 = s$, logo

$$p_A = (x-1)^{s_1}(x-w)^{s}(x-w^2)^{s}$$

Assim os autovalores de A são $1, w$ e w^2, com multiplicidade s_1, s e s resp.

Assim

$$\begin{aligned} tr(A) &= s_1 \cdot (1) + s \cdot (w) + s \cdot (w^2) \\ &= s_1 + s \cdot (w + w^2) \\ &= s_1 - s \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ec 10) Seja $p(X) = X^4 - 1 = (X+1)(X-1)(X+i)(X-i)$
então $p(A) = 0 \Rightarrow m_A | p$
$\Rightarrow m_A = (X+1)^{a_1}(X-1)^{a_2}(X+i)^{a_3}(X-i)^{a_4}$
com $a_i \in \{0,1\}$, p/ $i = 1,2,3,4$.
$\Rightarrow p_A = (X+1)^{b_1}(X-1)^{b_2}(X+i)^{b_3}(X-i)^{b_4}$
com $b_i \geq a_i$, $i = 1,2,3,4$.
Caso $a_4 \geq 1$, temos que i é autovalor de A e, além disso, se $a_4 \geq 2$, então A possui bloco de Jordan da forma

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

logo é verdadeira.

Ec 18) Seja $p(x) = X^2 + 1$. Então $p(A) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m_A | (X^2+1)$
$\Rightarrow m_A = X^2 + 1 \Rightarrow p_A = (X^2+1)^k$
Como $n = \deg(p_A) = 2k \Rightarrow 2k = n$.

?

Ex 20)

De fato, seja J a forma de Jordan de A, i.e:

$$P^{-1}AP = J$$

Note que se $J_m(\lambda)$ é bloco de Jordan e

$$B_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & \\ \vdots & & \iddots & & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Então $B^{-1}J^TB = J$ e assim $J \sim J^T$

Pondo

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\ell \end{bmatrix} \text{ e } J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\ell \end{bmatrix}$$

então

$$B^{-1}J^TB = J$$

Logo a forma de Jordan de A é similar a sua transposta.

Mas note que se $P^{-1}AP = J$

$$\Rightarrow J^T = (P^{-1}AP)^T$$

$$= P^TA^T(P^T)^{-1}$$

Logo $A^T \sim J^T \sim J \sim A \therefore A \sim A^T$ ∎

Ex 19)

Se $A \overset{\mathbb{C}}{\sim} B$, então $\exists\, C \in GL_n(\mathbb{C})$, $A = C^{-1}BC$

Logo $CA = BC$

Escreva $C = P + iQ$, $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$

Então

$$CA = BC \Rightarrow (P + iQ)A = B(P + iQ)$$
$$\Rightarrow PA + iQA = BP + iBQ$$
$$\Rightarrow PA = BP \text{ e } QA = BQ$$

Note que como $\det(C) \neq 0$, temos
$$\det(P + iQ) \neq 0$$
$$\Rightarrow \det(P + xQ) \in \mathbb{R}[x] \neq 0$$

Logo, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(P + \lambda Q) \neq 0$

Ponha $D = P + \lambda Q$

Então $DA = (P + \lambda Q)A = PA + \lambda QA = BP + \lambda BQ$
$$= B(P + \lambda Q)$$
$$= BD$$

$$\Rightarrow A = D^{-1}BD \therefore A \overset{\mathbb{R}}{\sim} B \ \square$$

24) Sejam $P_1, \dots, P_k$ as projeções em $W_1, \dots, W_k$ respectivamente, de modo que

- $P_1 + \dots + P_k = Id$
- $P_i \circ P_j = 0$, $i \neq j$
- $P_i \circ P_i = P_i$

Pelo teorema da decomposição primária, sabemos que estes são polinômios em T

Assim que, seja $w \in W$. Então $w \in V \Rightarrow$

$$w = v_1 + \dots + v_n$$

com $v_i \in W_i$, $i = 1, \dots, k$

Logo $P_i(w) = v_i \in W_i$, e, como W é T-inv. temos $P_i(w) = v_i \in W$, logo, $v_i \in W \cap W_i$, isto é,

$$v = v_1 + \dots + v_n \Rightarrow W \cap W_1 + \dots + W \cap W_k$$

Como a soma já era direta, segue.

Ex 8)

Temos que

$$J = J_1(0) \oplus J_3(2)$$

$$\downarrow$$

v_1

v_4 $\quad$ $v_2 \xleftarrow{T-2Id} v_3$

$\Rightarrow T v_1 = 2 v_1 + v_2$

$T v_2 = 2 v_2 + v_3$

$T v_3 = 2 v_3$

$T v_4 = 0 \cdot v_4$

Subespaços T-inv.

$\dim 0 = \{0\}$

$\dim 1 = \langle v_3 \rangle, \langle v_4 \rangle$

$\dim 2 = \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle$

$\dim 3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \langle v_2, v_3, v_4 \rangle$

$\dim 4 = V$

Exercício 34) $x^2+3 \mid m_T$ e 1 é único autovalor de T. Então 1 é raiz de m_T

Logo
$$m_T = (x^2+3)(x-1) \qquad (1)$$
ou
$$m_T = (x^2+3)(x-1)^2 \qquad (2)$$

Na dec. cíclica temos

Se $m_T = (2)$

$p_{v_1} = m_T = (x^2+3)(x-1)^2 \Rightarrow \mathbb{R}^4 = Z(v_1;T)$

Se $m_T = (1)$

$p_{v_1} = m_T = (x^2+3)(x-1) \Rightarrow \dim Z(v_1;T) = 3$

$\Downarrow$

$\dim Z(v_2;T) = 1$

Mas
$$p_{v_2} \mid p_{v_1} \text{ e } p_T = p_{v_1} \cdot p_{v_2}$$

$\Rightarrow p_{v_2} = (x-1) \Rightarrow$ 1 é único autovalor

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & \Downarrow^{(2)} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \Downarrow^{(1)} & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix} \end{array}$$