Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada

Lista 8: Espaços com produto interno

Considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercício 1. Seja $T : W \to V$ uma transformação linear *injetora* entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Suponha que $\langle , \rangle$, é um produto interno em V. Mostre que $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle T(w_1), T(w_2) \rangle$ para todos $w_1, w_2 \in W$ define um produto interno em W. [Em particular, se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, W um subespaço de V e $T : W \to V$ é a inclusão natural, teremos como consequência que $\langle , \rangle$ restrito aos elementos de W é um produto interno em W.]

Exercício 2. Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ hermitiana (i.e. $A^* = A$) é *positiva definida* se para toda matriz coluna não nula $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tem-se que $X^*AX > 0$.

a. Mostre que se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e se $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V então $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, onde $a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ é uma matriz positiva definida.

b. Mostre que se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ é uma matriz positiva definida, $\mathscr{B}$ é uma base de um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V então
$$\langle u, v \rangle := [v]^*_{\mathscr{B}} A [v]_{\mathscr{B}} \quad \text{para todo } u, v \in V$$
define um produto interno em V.

Exercício 3. Seja V um espaço com produto interno $\langle , \rangle$ de dimensão finita n. Mostre que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente independente se, e só se, a matriz $A = \left(\langle v_i, v_j \rangle\right) \in M_n(\mathbb{K})$ é não singular.

Exercício 4. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. com produto interno.

a. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostre que $\langle u, v \rangle = 0 \iff ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$

b. Mostre que isso não é verdade se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

c. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostre que para $u, v \in V$ $\langle u, v \rangle = 0 \iff ||\alpha u + \beta v||^2 = ||\alpha u||^2 + ||\beta v||^2$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Exercício 5. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. com produto interno. Sejam $u, v \in V$, prove:

a. LEI DO PARALELOGRAMO: $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.

b. DESIGUALDADE DE BESSEL: seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ortonormal de V, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k \rangle|^2 \leq ||v||^2$.

c. IDENTIDADE DE PARSEVAL: seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Mostre que $\langle v, u \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k \rangle \langle v_k, u \rangle$.

Exercício 6. Seja V um $\mathbb{C}$-e.v. com produto interno

a. Fixe vetores $w, u \in V$. Mostre que o operador $T : V \to V$ definido por $T(v) = \langle v, w \rangle\, u$, admite adjunta e a descreva explicitamente.

b. Suponha $\dim V < \infty$ e que $\langle T(v), v \rangle = 0$, para todo $v \in V$. Mostre que $T = 0$. Mostre que o resultado não é necessariamente verdadeiro se V é um $\mathbb{R}$-e.v.

Exercício 7. Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno. Seja $W \subseteq V$ um subespaço, mostre que cada classe de equivalência do quociente V/W possui exatamente um vetor ortogonal a W.

Exercício 8. Determine o mínimo do conjunto : $\left\{\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercício 9. Seja $V = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas no intervalo $[0,1]$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a. Exiba uma base ortonormal do subespaço de V gerado pelos polinômios 1, t e t^2.

b. Encontre o polinômio de grau menor ou igual a 2 que melhor aproxima $f(t) = \cos t$ no intervalo $[0,1]$.

Exercício 10. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. com produto interno. Suponha que U e W sejam subespaços de V. Mostre que:

a. $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ e se $V = W \oplus W^\perp$ então $W = (W^\perp)^\perp$.

b. $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

c. $U^\perp + W^\perp \subseteq (U \cap W)^\perp$.

d. Se $V = U \oplus U^\perp = W \oplus W^\perp$, então $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$.

Exercício 11. Considere $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$ e seja W o subespaço constituído por todos os polinômios com termo constante igual a zero. Mostre que $W^\perp = \{0\}$ e então $W^{\perp\perp} = \mathscr{P}(\mathbb{R}) \neq W$. Também $\mathscr{P}(\mathbb{R}) \neq W \oplus W^\perp$.

Exercício 12. Seja W um subespaço de dimensão finita de V. Existem, em geral, vários operadores projeções cuja imagem é W. Prove que se $E \in \mathscr{L}(V)$ é uma projeção cuja imagem é W e $\|E(v)\| \leq \|v\|$, para todo $v \in V$, então E é a projeção ortogonal em W, i.e. $E = E_W$.

Exercício 13. Seja W um subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço V com produto interno. Seja E_W a projeção ortogonal de V em W. Mostre que $\mathrm{Id} - E_W$ é a projeção ortogonal de V em $W^\perp$, é um operador projeção e $\ker(\mathrm{Id} - E_W) = W$. (Obs: $W^\perp$ não necessariamente terá dimensão finita).

Exercício 14. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. com produto interno $\langle,\rangle$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e sejam $T, S \in \mathscr{L}(V)$ que admitem adjuntos. Mostre que os seguintes operadores admitem adjuntos:

a. $T + S$ e $(T + S)^* = T^* + S^*$.

b. αT e $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

c. $T \circ S$ e $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

d. T^* e $(T^*)^* = T$.

Se $T, S \in \mathscr{L}(V)$ são operadores normais então é verdade que αT, $T + S$ e $T \circ S$ são normais?

Exercício 15. Seja T um operador linear em V que possui um adjunto T^*. Mostre que:

a. $\ker T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$ e que $\mathrm{Im}\, T^* \subset (\ker T)^\perp$.

b. Se $\dim V < \infty$, então $\mathrm{Im}\, T^* = (\ker T)^\perp$.

c. Se $\dim V < \infty$, T é injetora se e somente se T^*é sobrejetora e vice-versa.

d. Seja $V = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, com o produto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, e considere o operador

$$\begin{aligned} T : V &\to V \\ f &\mapsto T(f) : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad t \mapsto tf(t) \end{aligned}$$

Determine T^* e mostre que $\operatorname{Im} T^* \neq (\ker T)^\perp$.

Exercício 16. Seja $T \in L(V)$. Prove que se T é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Exercício 17. Suponha que V é de dimensão finita. Sejam $T : V \to V$ um operador linear e $\lambda \in K$. Mostre que λ é um autovalor de T se, e somente se, $\overline{\lambda}$ é um autovalor de T^*.

Exercício 18. Seja V um espaço com produto interno complexo de dimensão finita. Seja $T : V \to V$ um operador linear. Definimos

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*),\ T_2 = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

Mostre que

a. T_1 e T_2 são autoadjuntos.

b. $T = T_1 + iT_2$.

c. O que pode dizer sobre a unicidade dessa decomposição?

d. Escreva T^* em função de T_1 e T_2.

e. Encontre condições em T_1 e T_2 para que o operador T seja: i- autoadjunto; ii-unitário; iii- normal.

Exercício 19. Seja E um operador linear em V tal que $E^2 = E$ e tal que E possui um adjunto E^*. Prove que E é autoadjunto se, e somente se é normal. Prove também que, neste caso, E é a projeção ortogonal em $W = \operatorname{Im} E$.

Exercício 20. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e $T \in \mathscr{L}(V)$. Prove que T é autoadjunto se, e somente se $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $v \in V$. Conclua que os autovalores de um operador autoadjunto são reais.

Exercício 21. Sejam $S, T \in \mathscr{L}(V)$. Suponha que S e T admitem adjunto. Mostre que:

a. Se S e T são autoadjuntos, então ST é autoadjunto se, e somente se, $ST = TS$.

b. T^*T é autoadjunto.

c. Se T é autoadjunto, então S^*TS é autoadjunto.

Exercício 22. Suponha que $\dim V$ é finita e seja $T : V \to V$ um operador normal. Mostre que:

a. Se T é nilpotente então $T = 0$.

b. Se T é um operador projeção então $T^* = T$.

c. Se $T^3 = T^2$ então T é um operador projeção.

Exercício 23. Sejam V um $\mathbb{C}$-e.v. com produto interno de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador normal. Prove que:

a. T é autoadjunto se, e somente se, todo autovalor de T é um número real.

b. T é unitário se, e somente se, todo autovalor de T é um número complexo de módulo igual a 1.

c. T é o operador nulo se, e somente se todos os autovalores de T são nulos.

Exercício 24. Sejam T e S dois operadores autoadjuntos em um espaço vetorial V de dimensão finita. Prove que se T e S comutam, então existe uma base ortonormal de V que diagonaliza estes dois operadores simultaneamente.

Exercício 25. Um operador linear $T \in \mathscr{L}(V)$ é *não negativo* se T é autoadjunto e $\langle T(v), v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$. Mostre que se dimensão de V é finita:

a. T é não negativo se, e somente se, T é normal e os autovalores de T são números reais não negativos.

b. Se T é não negativo então existe um único operador linear não-negativo $R \in \mathscr{L}(V)$ que é raiz quadrada de T, isto é, que satisfaz $R^2 = T$.

Exercício 26. Seja $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{dx}$. Considere o operador $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(ax^2 + bx + c) = bx$.

a. Mostre que T não é autoadjunto.

b. A matriz de T na base canônica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que é simétrica. Explique por que isso não contradiz o tem a.

Exercício 27. Sejam V um $\mathbb{C}$-e.v. com produto interno de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador normal. Mostre que:

a. $T = \lambda_1 P_1 + ... + \lambda_k P_k$ onde $\mathrm{Id} = P_1 + ... + P_k$, $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$ e $E_i^2 = E_i = E_i^*$.

b. Existe $g \in \mathbb{C}[x]$ tal que $T^* = g(T)$.

c. Todo subespaço de V T-invariante é também T^*-invariante.

Exercício 28. Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com produto de interno complexo de dimensão finita. Considere $T \in \mathscr{L}(V)$ um operador qualquer e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de T (aparecendo tantas vezes quanto sua multiplicidade algébrica). Mostre que:

a. $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \mathrm{tr}(T^* \circ T)$

b. A igualdade vale se, e somente se, T é normal.

Exercício 29. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Ache uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^T A P$ é diagonal.

Exercício 30. Considere um $\mathbb{C}$-espaço vetorial V com o produto interno e dimensão finita. Dizemos que um operador $T : V \to V$ é *anti-hermitiano* ou *anti-autoadjunto* se para quaisquer vetores $u, v \in V$ tem-se que $\langle T(u), v\rangle = -\langle u, T(v)\rangle$. Assuma que T é anti-hermitiano e mostre que:

a. Os autovalores de T são imaginários puros.

b. Se $v_1, v_2 \in V$ são autovetores associados a autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ então eles são ortogonais.

c. Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Exercício 31. Determine a forma polar da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -1 & 1 \\ 0 & i & i \\ 1 & 2 & 1+i \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Ex 1)

De fato, note que, se $v, w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

i) $\langle v+\lambda w_1, w_2\rangle' = \langle T(v+\lambda w_1), T(w_2)\rangle$
$= \langle T(v)+\lambda T(w_1), T(w_2)\rangle$
$= \langle T(v), T(w_2)\rangle + \lambda\langle T(w_1), T(w_2)\rangle$
$= \langle v, w_2\rangle' + \lambda\langle w_1, w_2\rangle$

ii) $\langle w_1, w_2\rangle' = \langle T(w_1), T(w_2)\rangle$
$= \overline{\langle T(w_2), T(w_1)\rangle}$
$= \overline{\langle w_2, w_1\rangle'}$

iii) $\langle w_1, w_1\rangle' = \langle T(w_1), T(w_1)\rangle \geq 0$
e $\langle w_1, w_1\rangle' = 0 \Leftrightarrow \langle T(w_1), T(w_1)\rangle = 0$
$\Leftrightarrow T(w_1) = 0$
$\Leftrightarrow w_1 = 0$

Ex 2)

a) Seja $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.
Então se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ qualquer, temos

$$X^* A X = X^* \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni} x_i \end{bmatrix}$$

$$= [\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}] = \begin{bmatrix} \sum a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum a_{ni} x_i \end{bmatrix}$$

$$= \sum a_{1i} x_i \overline{x_1} + \dots + \sum a_{ni} x_i \overline{x_n}$$

$$= \sum \langle v_1, v_i \rangle x_i \overline{x_1} + \dots + \sum \langle v_n, v_i \rangle x_i \overline{x_n}$$

$$= \sum \sum \langle v_j, v_i \rangle x_i \overline{x_j}$$

$$= \left\langle \sum v_i x_i , \sum v_j x_j \right\rangle$$

$$= \langle x, x \rangle \geq 0$$

e $X^* A X = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow X = 0$

b) De fato, se $u, v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

i) $\langle \lambda v_1 + v_2, u \rangle = [u]_{\mathcal{B}}^* A [\lambda v_1 + v_2]_{\mathcal{B}}$

$$= [u]_{\mathcal{B}}^* A \left(\lambda [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \lambda [u]^*_{\mathcal{B}} A [v_1]_{\mathcal{B}} + [u]^*_{\mathcal{B}} A [v_2]_{\mathcal{B}}$$

$$= \lambda \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle$$

ii) $\overline{\langle v_2, v_1 \rangle} = \overline{[v_1]^*_{\mathcal{B}} A [v_2]_{\mathcal{B}}}$

$$= [v_1]^t_{\mathcal{B}} \bar{A} \overline{[v_2]_{\mathcal{B}}}$$

$$= \left(\overline{[v_2]_{\mathcal{B}}}^t \bar{A}^t [v_1]_{\mathcal{B}} \right)^t$$

$$= \left([v_2]^*_{\mathcal{B}} A^* [v_1]_{\mathcal{B}} \right)^t$$

$$= [v_2]^*_{\mathcal{B}} A [v_1]_{\mathcal{B}} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

iii) $\langle u, u \rangle = [u]^*_{\mathcal{B}} A [u]_{\mathcal{B}} > 0$
se $u \neq 0$, pois A é positiva definida.
Logo $\langle , \rangle$ é prod. interno.

Exc 3) $(\Rightarrow)$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é L.I. e logo base, e supond
Seja a que A é singular e seja $X \neq 0$,
tal que $AX = 0$
Então se X é o vetor coluna de x, temos

$$X^* A X = X^* \cdot 0 = 0$$

absurdo, pois, pelo exercício 2 temos que A é positiva definida.

($\Leftarrow$)

Suponha agora que A é singular e sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I. . Como A hermitiana, A é, em particular, diagonalizável.

Note que se

$$A = P^{-1} D P$$

com D diagonal, temos

$$[v_j]^* P^{-1} D P [v_i] = [P v_j]^* D [P v_i]$$

Isto é, $D = (b_{ij})$ é tal que

$$\langle P v_i, P v_j \rangle = b_{ij}$$

onde P é a matriz de mudança de base. Mas daí como λ é autovalor de A, temos que D deve ter um zero na diagonal, ou seja, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 = b_{ii} = \langle P v_i, P v_i \rangle$$

Mas $v_i \neq 0 \Rightarrow P v_i \neq 0$, absurdo. Logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ não são L.I. . ...

Ex 4)

a) Note que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

Logo $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = 0$

b) De fato, nesse caso temos

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

Logo, se $\langle u,v\rangle = i$, temos

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Mas $\langle u,v\rangle = i \neq 0$.

c) ($\Rightarrow$) Imediato, pois

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \langle \alpha u + \beta v, \alpha u + \beta v\rangle$$
$$= \|\alpha u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta\langle u,v\rangle) + \|\beta v\|^2$$
$$= \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$$

($\Leftarrow$)

Note que $\|\alpha u + \beta v\|^2 = \|\alpha u\|^2 + \|\beta v\|^2$

$$\Downarrow$$

$$2\,\mathrm{Re}(\alpha\beta\langle u,v\rangle) = 0$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Suponha que $\langle u,v\rangle = a+ib \neq 0$

Então $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Se $a \neq 0$, tomando $\alpha = 1, \beta = 1$, temos

$$2\operatorname{Re}(\langle u, v\rangle) = 2a = 0$$

$\rightarrow\leftarrow$, logo $a = 0$. Logo $b \neq 0$

Tomando $\alpha = i$, $\beta = 1$, temos

$$2\operatorname{Re}(i\langle u, v\rangle = 2\operatorname{Re}(-b + ia)$$
$$= -2b = 0$$

$\rightarrow\leftarrow$. Logo $\langle u, v\rangle = 0$ $\blacksquare$

Ex 5)

a)
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$
$$= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

b) Note que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k\rangle v_k\right\|^2 = \left\langle \sum \langle v, v_k\rangle v_k, \sum \langle v, v_k\rangle v_k \right\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |\langle v, v_k\rangle|^2$$

Logo,

$0 \le \| v - \sum' \langle v, v_k \rangle v_k \|^2$

$= \langle v - \sum' \langle v, v_k \rangle v_k \, , \, v - \sum' \langle v, v_k \rangle v_k \rangle$

$= \|v\|^2 + \langle -\sum' \langle v, v_k \rangle v_k, v \rangle$
$+ \langle v, -\sum' \langle v, v_k \rangle v_k \rangle$

$+ \sum' |\langle v, v_k \rangle|^2$

$= \|v\|^2 - \sum' \underline{\langle v, v_k \rangle \cdot \langle v_k, v \rangle}$
$- \sum' \langle v, v_k \rangle \overline{\langle v, v_k \rangle}$
$+ \sum' |\langle v, v_k \rangle|^2$

$= \|v\|^2 - 2 \sum' |\langle v, v_k \rangle|^2 + \sum' |\langle v, v_k \rangle|^2$

$= \|v\|^2 - \sum' |\langle v, v_k \rangle|^2$

e) Seja $u = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k$. Então

$\langle u, v_j \rangle = \langle \sum' a_k v_k, v_j \rangle = a_j$

Logo, $u = \sum' \langle u, v_k \rangle \cdot v_k$

Segue que

$$\langle v, u\rangle = \langle v, \sum \langle u, v_k\rangle v_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle u, v_k\rangle} \langle v, v_k\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k\rangle \langle v_k, u\rangle$$

Ex6)

a) Note que, da definição de adjunta, temos que

$$\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T^*(v_2)\rangle$$

Mas,

$$\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle\langle v_1, w\rangle u, v_2\rangle$$
$$= \langle v_1, w\rangle\langle u, v_2\rangle$$
$$= \langle v_1, \langle v_2, u\rangle \cdot w\rangle$$

Logo, pondo $T^*: V \longrightarrow V$

$$v \longmapsto \langle v, u\rangle \cdot w$$

temos que $\langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T^*(v_2)\rangle, \forall v_1, v_2$

b)

$$0 = \langle u+v, \underset{T(u)+T(v)}{T(u+v)} \rangle = \cancel{\langle u, T(u) \rangle}_{0} + \langle u, T(v) \rangle + \langle v, T(u) \rangle + \cancel{\langle v, T(v) \rangle}_{0}$$

$$\Rightarrow \langle u, T(v) \rangle = -\langle v, T(u) \rangle$$

Mas também

$$0 = \langle u+iv, \underset{T(u)+iT(v)}{T(u+iv)} \rangle = \cancel{\langle u, T(u) \rangle}_{0} + \bar{i}\langle u, T(v) \rangle + i\langle v, T(u) \rangle + i\bar{i}\cancel{\langle v, T(v) \rangle}_{0}$$

$$= -\langle u, T(v) \rangle + i\langle v, T(u) \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u, T(v) \rangle = i\langle v, T(u) \rangle$$

$$\Rightarrow (1+i)\langle v, T(u) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle v, T(u) \rangle = 0$$

Em particular, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V, temos que $\langle v_i, Tv_j \rangle = 0$, $\forall i,j$, logo $T = 0$

Se $V = \mathbb{R}^2$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, é $T(x,y) = (-y,x)$
Então $T \neq 0$, pois $T(1,0) = (0,1) \neq 0$,
Mas

$$\langle (x,y), T(x,y) \rangle = \langle (x,y), (-y,x) \rangle = -xy + yx = 0$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ex 7)

Seja $v + W \in V/W$.
Então $\operatorname{proj}_W v \in W \Rightarrow v - \operatorname{proj}_W v \in v + W$
e $v - \operatorname{proj}_W v \perp W$
Além disso, pela unicidade da melhor aproximação temos que esse é único.

Ex 10)

a) Seja $w \in W$. Então, $\forall\, w' \in W^{\perp}$, temos
$\langle w, w' \rangle = 0 \Rightarrow w \in (W^{\perp})^{\perp}$
Suponha $V = W \oplus W^{\perp}$ e seja $w \in (W^{\perp})^{\perp}$,
$w = w_1 + w_2$, $w_1 \in W$, $w_2 \in W^{\perp}$.
Então

$$\overset{(W^\perp)^\perp}{\underset{\Downarrow}{}}\ \ \overset{W^\perp}{\underset{\Downarrow}{}}$$
$$0 = \langle w, w_2 \rangle = \langle w_1 + w_2, w_2 \rangle$$
$$= \langle \underset{W}{\underset{\Uparrow}{w_1}}, \underset{W^\perp}{\underset{\Uparrow}{w_2}} \rangle + \langle w_2, w_2 \rangle$$
$$= \|w_2\|^2$$

$\Rightarrow w_2 = 0$, isto é, $w = w_1 \Rightarrow w \in W$.

b) Seja $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$ e seja $u + w \in U + W$
Então $\langle v, u+w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$
$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow v \in (U+W)^\perp$

Agora seja $v \in (U+W)^\perp$. Então $\forall u \in U$, $w \in W^\perp$, temos $u, w \in U+W$ e logo

$$\langle v, w\rangle = \langle v, u\rangle = 0$$

$\Rightarrow v \in U^\perp \cap W^\perp$

c) Se $v \in U^\perp + W^\perp$, $v = u + w$ e seja $w' \in U \cap W$

Então

$$\langle v, w'\rangle = \langle u + w, w'\rangle$$
$$= \langle \underset{U^\perp}{\overset{\cap}{u}}, \underset{U}{\overset{\cap}{w'}}\rangle + \langle \underset{W^\perp}{\overset{\cap}{w}}, \underset{W}{\overset{\cap}{w'}}\rangle$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow v \in (U \cap W)^\perp$

d) Seja $v \in (U \cap W)^\perp$, $v = u_1 + u_2 = w_1 + w_2$, $u_1 \in U$, $u_2 \in U^\perp$, $w_1 \in W$, $w_2 \in W^\perp$.

Então para

$$0 = \langle \overset{\overset{U}{\cup}}{u_1}, v\rangle = \langle \overset{U}{u_1}, u_1\rangle + \langle \overset{U}{u_1}, \overset{U^\perp}{u_2}\rangle$$
$$= \|u_1\|^2$$

$\Rightarrow u_1 = 0$

Análogamente $\Rightarrow w_1 = 0$

$\Rightarrow v = 0 u_2$, $v = w_2 \Rightarrow v \in U^\perp$ e $v \in U^\perp$

$\Rightarrow v \in U^\perp + W^\perp$

11) Considere $\mathcal{B} = \{t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots\}$ base de W. Suponha que $p \in W^\perp$

$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

Assim

$$0 = \int_0^1 t \cdot p(t)\, dt$$
$$= \frac{a_0 t^2}{2} + \frac{a_1 t^3}{3} + \dots + \frac{a_n t^{n+2}}{n+2}$$

Análogamente

$$0 = \int_0^1 t^j p(t)\, dt$$

$$= \frac{a_0 t^{j+1}}{j+1} + \frac{a_1 t^{j+2}}{j+2} + \dots + \frac{a_n t^{n+j+1}}{n+j+1}$$

$j = 1, 2, 3, \dots$

Isso é,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 & t^3 & \cdots & t^{n+2} \\ t^3 & t^4 & \cdots & t^{n+3} \\ \vdots & & & \\ t^n & t^{n+} & \cdots & t^{n+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$
(vandermonde)

13) De fato, dado $v \in V$, $v - E_W(v) \perp W \Rightarrow$
$\Rightarrow v - E_W(v) \in W^{\perp}$

Além disso, $(Id - E_W)^2(v) = (Id - E_W)(v - E_W v)$

$$= v - E_W v - E_W v + E_W v$$
$$= v - E_W v$$
$$= (Id - E_W) v$$

Logo é projeção.

Ainda: $v \in \ker (Id - E_W) v \Leftrightarrow v - E_W v = 0$
$$\Leftrightarrow E_W v = v$$
$$\Leftrightarrow v \in W$$

14) OK

15)

a) $v \in \ker T^* \Rightarrow T^*(v) = 0$
$$\Rightarrow \langle u, T^*(v) \rangle = 0, \forall u \in V$$
$$\Rightarrow \langle T(u), v \rangle = 0, \forall u \in V$$
$$\Rightarrow v \perp \operatorname{Im} T$$
$$\Rightarrow v \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$$

$v \in (\operatorname{Im} T)^{\perp} \Rightarrow \langle T(u), v \rangle = 0, \forall u \in V$

$\Rightarrow \langle u, T^*(v)\rangle = 0, \ \forall u \in V$

$\Rightarrow T^*(v) = 0$

$\Rightarrow v \in \ker T^*$

Se $v \in \underline{I}m\, T^* \Rightarrow \exists u,\ T^* u = v$

Assim, se $w \in \ker T$, temos

$$\langle w, v\rangle = \langle w, T^* u\rangle = \langle T(w), u\rangle = \langle 0, u\rangle = 0$$

Logo $v \perp \ker T \Rightarrow v \in \ker T^\perp$

b) $\subseteq$ OK, já temos.

Tome base $w_1, \dots, w_n$ base de $\ker T$, $w_1', \dots, w_m'$ base de $\ker T^\perp$ tal que $w_1, \dots, w_n, w_1', \dots, w_m'$ é base de V

Seja $v = a_1 w_1' + \dots + a_m w_m' \in \ker T^\perp$

<u>AF</u>: $(\operatorname{Im} T^*)^\perp \subseteq \ker T$

De fato, se $x \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp$, $\forall y \in V$,

$$0 \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

Logo $Tx = 0 \Rightarrow x \in \ker T$

$\therefore (\operatorname{Im} T^*)^\perp \subseteq \ker T$

$\Rightarrow ((\operatorname{Im} T^*)^\perp)^\perp \supseteq (\ker T)^\perp$ $\square$

$\operatorname{Im} T^*$ $\rightarrow \dim V < \infty$

e) Seja $\dim V = n < \infty$

Então, T injetora $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

$\Leftrightarrow (\ker T)^\perp = V$

(b) $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T^* = V$

$\Leftrightarrow T^*$ sobrejetora.

d)

$$\langle T(f_1), f_2 \rangle = \langle t \cdot f_1, f_2 \rangle$$

$$= \int_0^1 t \cdot f_1 f_2 \, dt$$

$$= \int_0^1 f_1 \cdot t \cdot f_2 \, dt$$

$$= \langle f_1, t \cdot f_2 \rangle$$

$$= \langle f_1, T^*(f_2) \rangle$$

Logo $T = T^*$.

Mas, $\ker T = \{0\} \Rightarrow (\ker T)^\perp = V$

Porém claramente $\operatorname{Im} T^* \subsetneq V$, pois

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f \in V$, $f \notin \operatorname{Im} T^*$

$\quad t \longmapsto 1$

De fato, suponha que $f = T^* g$, $g \in V$

Então $t \cdot g(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$, absurdo, pois $1 = 0 \cdot g(0) = 0 \rightarrow\leftarrow$

Ex 16)

Dados $u, v \in V$, temos

$$\langle T(T^{-1}(u)), v\rangle = \langle u, v\rangle$$
$$= \langle T^{-1}(u), T^*(v)\rangle$$
$$\langle u, (T^{-1})^*(T^*(v))\rangle, \forall u$$

$$\Rightarrow (T^{-1})^*(T^*(v)) = v$$
$$\Rightarrow (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Ex 17) suponha que λ não é autovalor de T, então $\lambda Id - T$ é inversível, isto é, $\exists S$ operador em V tal que

$$S(\lambda Id - T) = Id$$
$$\Rightarrow \quad (\bar{\lambda} Id - T^*) S^* = Id^* = Id$$

Isto é, $\bar{\lambda} Id - T^*$ é inversível $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{\lambda}$ não é autovalor de T^*

Analogamente, $\bar{\lambda}$ não é autovalor de T^*

$\Rightarrow \exists S'$,

$$(\bar{\lambda} Id - T^*) S' = Id$$

$$\Rightarrow \quad (T-\lambda Id)S'^{*} = Id$$

$\Rightarrow \lambda$ não é autovalor de T.

Ec(8)

a) $(T_1)^* = \frac{1}{2}(T+T^*)^* = \frac{1}{2}(T^*+T) = T_1$

$(T_2)^* = \left(\frac{1}{2i}(T-T^*)\right)^* = \left(\frac{i}{2}(T^*-T)\right)^*$

$= -\frac{i}{2}(T-T^*) = \frac{1}{2i}(T-T^*) = T_2$

b) $T_1 + iT_2 = \frac{1}{2}(T+T^*) + \frac{1}{2}(T-T^*) = T$

c)

d) $T_1 = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T^* \Rightarrow T^* = 2\left(T_1 - \frac{1}{2}T\right)$

$= 2T_1 - T$

$T_2 = \frac{1}{2i}T - \frac{1}{2i}T^* \Rightarrow T^* = T - 2iT_2$

$\Rightarrow 2T^* = 2T_1 - 2iT_2$

$\Rightarrow T^* = T_1 - iT_2$

e) $T_1 = T \Rightarrow T = T^* \Rightarrow T$ auto-adjunto

$T_1 - iT_2 = T^{-1} \Rightarrow T$ unitário

$$(T_1 + iT_2)(T_1 - iT_2) = (T_1 - iT_2)(T_1 + iT_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{T_1^2} - iT_1T_2 + iT_2T_1 + \cancel{T_2^2} =$$
$$= \cancel{T_1^2} + iT_1T_2 - iT_2T_1 + \cancel{T_2^2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2iT_2T_1 = 2iT_1T_2$$

$$\Updownarrow$$

$$T_2T_1 = T_1T_2 \iff T \text{ normal}$$

Ec 20)

Suponha T auto-adjunto. Dado $v \in V$,

$$\overline{\langle v, T(v)\rangle} = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle$$
$$= \langle v, T(v)\rangle$$

$\Rightarrow \langle v, T(v)\rangle \in \mathbb{R}$

Reciprocamente, se $\langle v, T(v)\rangle \in \mathbb{R}$, $\forall v$ e seja $C = T^* - T$. Então

$$\langle T(v), v\rangle = \langle v, T^*(v)\rangle$$
$$\|$$
$$\overline{\langle v, T(v)\rangle} = \langle v, T(v)\rangle$$

$$\Rightarrow \langle v, T^*(v) - T(v) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle v, (T^* - T)(v) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle v, C(v) \rangle = 0, \ \forall v \in V$$

Vejamos que $C \equiv 0$. De fato,

$$0 = \langle u+v, C(u+v) \rangle = \langle u+v, C(u) + C(v) \rangle$$
$$= \cancel{\langle u, C(u) \rangle}^{\,0} + \langle v, C(u) \rangle + \langle u, C(v) \rangle + \cancel{\langle v, C(v) \rangle}^{\,0}$$
$$\Rightarrow \langle v, C(u) \rangle + \langle u, C(v) \rangle = 0 \qquad (1)$$

Por outro lado

$$0 = \langle iu+v, C(iu+v) \rangle$$
$$= i(-i)\cancel{\langle u, C(u) \rangle}^{\,0} + (-i)\langle v, C(u) \rangle +$$
$$+ i\langle u, C(v) \rangle + \cancel{\langle v, C(v) \rangle}_{\,0}$$

$$\Rightarrow 0 = i(\langle u, C(v) \rangle - \langle v, C(u) \rangle)$$
$$\Rightarrow -\langle v, C(u) \rangle + \langle u, C(v) \rangle = 0 \qquad (2)$$

Fazendo (1)+(2), temos

$$2\langle u, C(v) \rangle = 0 \Rightarrow \langle u, C(v) \rangle = 0$$
$$\Rightarrow \langle v, C(u) \rangle = 0$$

Como u, v foram quaisquer, isso implica $C(u) = C(v) = 0$, $\forall u, v \in V$

$$\Rightarrow C \equiv 0 \Rightarrow T = T^*$$

Ex 21)

a) $(\Rightarrow)$ $\underset{ST}{\underbrace{(ST)}}^* = T^* S^* = TS$

$(\Leftarrow)$ $(ST)^* = T^* S^* = TS = ST$

b) $(T^* T)^* = T^* (T^*)^* = T^* T$

c) $(S^* T S)^* = S^* T^* (S^*)^*$
$= S^* T S$

Ex 26)

b) Pois a base canônica não é orto normal

c) Tome $p_1 = 1 \cdot x + 1$ $p_2 = -1 \cdot x + 1$
Então
$\langle Tp_1, p_2 \rangle = \langle x, -x+1 \rangle = \int_0^1 -x^2 + x\,dx$

$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

Enquanto N

$\langle p_1, Tp_2 \rangle = \langle x+1, -x \rangle = \int_0^1 -x^2 - x\,dx$
$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$

Ex 30)

a) Seja λ autovalor de T com autovetor associado $v \neq 0$. Então

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, -Tv \rangle$$
$$= \langle v, -\lambda v \rangle = -\bar{\lambda} \langle v, v \rangle$$

$\Leftrightarrow \lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$

b) Se v_1 e v_2 são autovetores com λ_1, λ_2 então

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle Tv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, -Tv_2 \rangle$$
$$= \langle v_1, -\lambda_2 v_2 \rangle = -\bar{\lambda}_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

Mas $\lambda_2 \in i\mathbb{R} \Rightarrow \bar{\lambda}_2 = -\lambda_2$, logo

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

c) Segue como no caso hermitiano

Ex 22)

a) Suponha que $T^k = 0$ $\Rightarrow$ Todo autovalor é $0 \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$.
e seja T normal. Então existe base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
Assim real

$$0 = [T^k]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \Rightarrow T \equiv 0.$

$\hookrightarrow T^2 = T \Rightarrow$ Todo autovalor é 0 ou $1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

b) existe $\mathcal{B}$ base ortonormal real tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Então $T^2 = T \Rightarrow$

$$\operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2 = [T^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$
$$= [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$\Rightarrow \lambda_i^2 = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \lambda_i = 0$ ou $\lambda_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n$

Mas daí

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^* = \operatorname{diag}(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n)$$
$$= \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$
$$= [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

e como $\mathcal{B}$ é ortonormal $\Rightarrow T^* = T$

c) Seja $\mathcal{B}$ base ortonormal em $\mathbb{C}$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Então

$$\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^3 = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_i^3 = \lambda_i^2, \quad i = 1, \ldots, n$$

$T^3 = T^2$
$\Rightarrow$ Todo autovalor de T é real
$\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base ortonormal real

$\Rightarrow \lambda_i^2(\lambda_i - 1) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \lambda_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n \Rightarrow \exists\, \mathcal{B}'$

base

base
real
ortonormal
de autovetores

$\Rightarrow \lambda_i^2 = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right)^2 = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}$

$\Rightarrow T^2 = T \Rightarrow T$ é projeção.

Ex. 23)

a) T auto-adjunto $\Rightarrow$ todo autovalor de T é real OK!

Reciprocamente, suponha que todo autovalor de T é real e seja $\mathcal{B}$ base ortonormal de autovetores de T, de modo que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Então

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^* = \mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n)$$
$$= \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

Logo $T = T^*$ e T é autoadjunto.

b) Suponha T unitário e seja $\mathcal{B}$ base ortonormal de autovetores de T, tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Então

$$\mathrm{diag}(1,\dots,1) = [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T^*T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$= \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^* [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} =$$

$$= \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1},\dots,\overline{\lambda_n})\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

$$= \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,\dots,|\lambda_n|^2)$$

$\Rightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_n| = 1$

$\Rightarrow$ Todo autovalor de T é numero real complexo de módulo 1

Reciprocamente, suponha que todo autovalor de T é numero complexo de módulo 1 e seja $\mathcal{B}$ base ortonormal de autovetores de T, de modo que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

Então $[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^* = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1},\dots,\overline{\lambda_n})$

e logo

$$[T^*T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^* [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$= \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,\dots,|\lambda_n|^2)$$

$$= \mathrm{diag}(1,\dots,1)$$

$$= [Id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$\Rightarrow T^*T = Id$

e, analogamente, $TT^* = Id$

$\Rightarrow T$ é unitário.

c) Seja $\mathcal{B}$ base ortonormal de autovetores de T, de modo que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
Se todo autovalor de T é nulo, então $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = 0 = [0]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \Rightarrow T = 0$.
A recíproca é imediata.

Ex 24)

Note que, se T e S comutam, então todo auto-espaço de T é S-invariante, pois, se $v \in Aut_\lambda(T)$, então

$$TSv = STv = S\lambda v = \lambda Sv$$

$\Rightarrow Sv \in Aut_\lambda(T)$.

Seja $\mathcal{B}$ base ortonormal que diagonaliza T. Então, pela observação acima temos que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & & 0 \\ 0 & S_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & S_r \end{bmatrix}$$

onde cada bloco S_i representa a restrição de S a $Aut_{\lambda_i}(T)$.
Note que S normal $\Rightarrow S_i$ normal, $\forall i$

e logo p/ cada $i=1,\dots,r$ existe base ortonormal que diagonaliza S_i.
Pondo $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$, temos que T e S são ambas diagonais em $\mathcal{B}'$. $\square$

25) ($\Rightarrow$)
a) Suponha T não negativo.
Então T auto-adjunto $\Rightarrow$ T normal.
Além disso, se λ é autovalor de T com autovetor v, então

$$0 \leq \langle Tv, v\rangle = \lambda \langle v, v\rangle$$

Como $\langle v,v\rangle > 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$.
($\Leftarrow$)
Seja T normal e que todo autovalor é real não-negativo. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de autovetores de T, de modo que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $v \in V$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
Então $Tv = a_1\lambda_1 v_1 + \dots + a_n \lambda_n v_n$ e logo

$$\langle Tv, v\rangle = a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 + \dots + a_n^2 \lambda_n \geq 0$$

Como v foi qualquer, segue que $\langle Tv, v\rangle \geq 0$, $\forall v \in V$.

Além disso, todo autovalor de T real e T normal $\Rightarrow$ T auto-adjunto, pelo ex) 23, a.

b) Se T é não negativo, então por (a) T é normal e todo autovalor de T é real não negativo. Logo, $\forall i = 1, \dots, n$, $\sqrt{\lambda_i} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Seja $\mathcal{B}$ base ortonormal de de autovetores de T tal que
$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Considere N o operador tal que
$[N]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$
Então

$$\underbrace{\left([N]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2}_{[N^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}} = [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \Rightarrow N^2 = T$$

Note que $[N]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é normal $\Rightarrow$ N normal e todos os autovalores são reais ñ negativos $\Rightarrow$ N ñ-negativo
Além disso, se N' é outro operador ñ-negativo tal que $N'^2 = T$, então, se $\mathcal{B}$ é base ortonormal de autovetores de N' tal que $N' = \mathrm{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$
Então

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [N'^2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left([N]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)^2 = \mathrm{diag}(\beta_1^2, \dots, \beta_n^2)$$

Logo $\beta_1^2, \dots, \beta_n^2$ são os autovalores de T e portanto $\beta_i = \pm\sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$

Como N' é n-negativo, todos os autovalores são n-negativos e logo $\beta_i = +\sqrt{\lambda_i}$, $j = 1, \dots, n$.

12) $E^2 = E$, $\operatorname{Im} E = W$, $\|E(v)\| \le \|v\|$

$\Downarrow ?$

E_W

$E_W(v) =$ melhor aprox $\Leftrightarrow v - E_W(v) \in W^\perp$

de v por W

TO PROVE

$V = \operatorname{Im} E \oplus \ker E = W \oplus \ker E$

$\|E(v)\|^2 = \langle E(v), E(v) \rangle \le \langle v, v \rangle$

$u \in \ker E \Rightarrow E(u) = 0$

$\langle u, E(v) \rangle = 0 ?$

$\underset{\ker E}{\overset{\cap}{}}$ $\underset{W}{\overset{\cap}{}}$

$$
\begin{aligned}
\langle E(v), u \rangle &= \langle E(v), v - E(v) \rangle \\
&= \langle E(v), v \rangle - \langle E(v), E(v) \rangle \\
&\ge \langle E(v), v \rangle - \langle v, v \rangle \\
&= \langle E(v) - v, v \rangle \\
&= \langle -u, v \rangle
\end{aligned}
$$

$\downarrow$

Suponha que E não é a projeção ortogonal sobre W.

$\Rightarrow \exists u \in V$ tal que $E - E(u) \notin W^{\perp}$

$\Rightarrow \exists w' \in W$ t.q. $\langle u - E(u), w' \rangle \neq 0$

Como $w' \in W = \operatorname{Im} E \Rightarrow \exists v \in V$ t.q.

$$\langle u - E(u), E(v) \rangle \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} u - E(u) \neq 0 \\ E(v) \neq 0 \end{cases}$$

Seja $\alpha = \dfrac{\|u - E(u)\|^2}{\langle E(v), u - E(u) \rangle} \neq 0$

Seja $w = u - E(u) - \alpha E(v)$

Então $E(w) = \cancel{E}(u) - \cancel{E^2}(u) - \alpha E^2(v)$
$= -\alpha E(v)$

$\Rightarrow \|E(w)\|^2 = |\alpha|^2 \|E(v)\|^2$

Por outro lado,

$$\|w\|^2 = \langle u - E(u) - \alpha E(v), u - E(u) - \alpha E(v) \rangle$$
$$= \|u - E(u)\|^2 - \bar{\alpha} \langle u - E(u), E(v) \rangle - \alpha \langle E(v), u - E(u) \rangle$$
$$+ |\alpha|^2 \|E(v)\|^2$$
$$= \cancel{\|u - E(u)\|^2} - \cancel{\|u - E(u)\|^2} - \|u - E(u)\|^2 + \|E(w)\|^2$$

$$\Rightarrow \|w\|^2 + \underbrace{\|u - E(u)\|^2}_{>0} = \|E(w)\|^2$$

$\Rightarrow \|w\|^2 < \|E(w)\|^2$

$\times$

se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

Ex 19)

Suponha E autoadjunto e E é normal.

Suponha E normal. Então $\exists\, \mathcal{B}$ base de V na qual E é diagonal, i.e: $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ ortonormal tal que $E=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

Mas então

$$\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2)=E^2=E=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

Logo $\lambda_i^2=\lambda_i \iff \lambda_i(\lambda_i-1)=0,\ \forall i=1,\dots,n$

Segue que os únicos autovalores de E são 0 e $1 \Rightarrow E^*=\mathrm{diag}(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$
$=E$

$$\langle Px, Py\rangle=\langle PP^*x, y\rangle=\langle P^*Px, y\rangle$$
$$=\langle Px, Py\rangle$$

$\Rightarrow \|Px\|=\|P^*x\| \Rightarrow \underline{\ker P=\ker P^*}$

$v\in \mathrm{Im}(P)^\perp$ (pois $x\in\ker P\Rightarrow Px=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\|Px\|=0\Rightarrow$
$\Rightarrow\|P^*x\|=0\Rightarrow$
$\Rightarrow x\in\ker P^*$

$\iff\langle v, Pu\rangle=0,\ \forall u\in V$

$\iff\langle P^*v, u\rangle=0,\ \forall u\in V \iff v\in\ker(P^*)$

AF: $P^2=P$ e $PP^*=P^*P \Rightarrow P=P^*$

De fato,

$$\langle x, Py\rangle = \langle Px + (Id - P)x, Py\rangle$$

$$= \langle Px, Py\rangle + \langle (Id-P)x, Py\rangle$$

Mas note que $P((Id-P)x) = (P-P^2)x = 0$

Logo $(Id-P)x \in \ker(P) = \ker(P^*) = (\operatorname{Im} P)^\perp$

Logo $\langle (Id-P)x, y\rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$

Daí $\langle Px, Py\rangle = \langle Px, y + (P-Id)y\rangle$

$= \langle Px, y\rangle - \langle Px, (Id-P)y\rangle$

Análogamente $(Id-P)y \in (\operatorname{Im} P)^\perp$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \langle Px, Py\rangle = \langle Px, y\rangle$

Logo $\langle x, Py\rangle = \langle Px, y\rangle \Rightarrow P = P^*$ $\square$