Universidade Federal do Paraná
Centro Politécnico
ET-DMAT
Prof. Maria Eugênia Martin

MATE7003 - Álgebra Linear Avançada

Lista 9: Formas bilineares

Exercício 1. Seja $V = M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e seja f a forma bilinear em V definida por $f(X,Y) = \operatorname{tr}(X^T AY)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre a matriz de f na base ordenada $\mathscr{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$, onde E_{ij} é a matriz cujo única entrada não nula é 1 na linha i e coluna j.

Exercício 2. Seja $V = M_n(\mathbb{C})$, mostre que a equação

$$f(A,B) = n\operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

define uma forma bilinear f em V. É verdade que f é simétrica? É degenerada ou não-degenerada?

Exercício 3. Sejam f, g formas bilineares em um espaço vetorial de dimensão finta V. Suponha que g seja não-degenerada. Mostre que exitem únicos operadores lineares T_1 e T_2 em V tais que

$$f(u,v) = g(T_1(u), v) = g(u, T_2(v))$$

para todos $u, v \in V$. É verdade se g for degenerada?

Exercício 4. Seja $f \neq 0$ uma forma bilinear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Mostre que f pode ser expressa como um produto de dois funcionais lineares (i.e., $f(v,w) = g(v)h(w)$ com $g, h \in V^*$) se, e somente se, f tem posto 1.

Exercício 5. Sejam V um $\mathbb{K}$-e.v. com $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Mostre que

$$\mathscr{L}_2(V;\mathbb{K}) = \operatorname{Sym}_2(V;\mathbb{K}) \oplus \operatorname{ASym}_2(V;\mathbb{K}).$$

Exercício 6. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. e $f \in \mathscr{L}_2(V;\mathbb{K})$. A função $q : V \to \mathbb{K}$ dada por $q(v) = f(v,v)$ é denominada *forma quadrática* associada a f. Mostre que se $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ então vale a *identidade de polarização* $f(u,v) = \frac{1}{4}q(u+v) - \frac{1}{4}q(u-v)$.

Exercício 7. Seja $q(x_1,x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ uma forma quadrática associada a uma forma bilinear simétrica f em $\mathbb{R}^2$. Mostre que f é não-degenerada se e somente se $b^2 - 4ac \neq 0$.

Exercício 8. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de $\dim V = n < \infty$, $f \in \operatorname{Sym}_2(V;\mathbb{K})$ e $q : V \to \mathbb{K}$ a forma quadrática associada a f. Então existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e uma base $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V tal que $q(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2$ para cada $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$.

Exercício 9. Seja V um $\mathbb{R}$-e.v. de $\dim V = n \geq 1$, munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Vimos que se $f \in \operatorname{Sym}_2(V;\mathbb{R})$ então $\exists!\ T \in \mathscr{L}(V)$ autoadjunto tal que $f(u,v) = \langle T(u), v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Queremos ver como se relacionam a forma quadrática q associada a f e com os autovalores e autovetores de T. Definimos a *esfera unitária* como sendo o conjunto de todos os $v \in V$ tais que $\langle v, v\rangle = 1$. Mostre que:

a. Os autovalores de T, se existirem, serão achados dentre os valores que q toma na esfera unitária em V.

b. Assuma que q não muda de sinal em V. Mostre que se $q(x) = 0$ para algum $x \in V$ então $T(x) = 0$ (ou seja se q não muda de sinal em V então q se anula no $\ker T$).

c. Dentre os valores que q toma na esfera unitária assuma que exista um extremo (máximo ou mínimo) em um vetor u. Mostre que u é um autovetor de T, com autovalor correspondente $q(u)$ (ou seja, os valores extremos de uma forma quadrática q na esfera unitária são autovalores de T).

Exercício 10. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e f uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V. Associada com f definimos a transformação linear $L_f : V \to V^*$ dada por

$$\begin{aligned} L_f : V &\to V^* \\ v &\mapsto L_f(v) : V \mapsto \mathbb{K} \\ &\qquad\qquad u \mapsto f(v,u) \end{aligned}$$

Mostre que:

a. L_f é um isomorfismo natural de V sobre o seu espaço dual V^*.

b. Para cada base $\mathscr{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V existe uma única base $\mathscr{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ de V tal que $f(v_i, v'_j) = \delta_{ij}$.

c. Para cada vetor $v \in V$ temos $v = \sum_{i=1}^n f(v, v'_i)v_i = \sum_{i=1}^n f(v_i, v)v'_i$.

Exercício 11. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{K}$ e seja $f : U \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Chamamos o conjunto

$$U_0 = \{u \in U \mid f(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$$

de kernel à esquerda de f e ao conjunto

$$V_0 = \{v \in V \mid f(u,v) = 0 \text{ para todo } u \in u\}$$

de kernel à direita de f. Prove que:

a. $\dim U/U_0 = \dim V/V_0$.

b. f induz uma forma bilinear $f' : U/U_0 \times V/V_0 \to \mathbb{K}$ dada por $f'(u + U_0, v + V_0) = f(u,v)$ para a qual os kernels à esquerda e à direita são nulos.

Exercício 12. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, mostre que a função $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(X,Y) = Y^T AX$ é uma forma bilinear positiva definida se, e somente se, existe uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A = P^T P$.

Exercício 13. Seja $f : V \times V \to \mathbb{K}$ uma forma bilinear em V com a seguinte propriedade: sempre que $f(u,v) = 0$ então $f(v,u) = 0$. O objetivo é mostrar que ou f é simétrica ou f é antissimétrica. Para isso:

a. Sejam $u, v, w \in V$, prove que $f(u, f(u,w)v - f(u,v)w) = 0$. Deduza que $f(u,w)f(v,u) = f(w,u)g(u,v)$.

b. Faça $w = u$ e deduza que se $f(u,v) \neq f(v,u)$ então $f(u,u) = 0$.

c. Mostre que se f não for simétrica então $f(w,w) = 0$ para todo $w \in V$. Para isso, escolha u, v com $f(u,v) \neq f(v,u)$ e estude separadamente os casos $f(u,w) \neq f(w,u)$, $f(u,w) = f(w,u)$.

d. Mostre que se $f(w,w) = 0$ para todo $w \in V$ então f é antissimétrica.

Exercício 14. Sejam $q = 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$ uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ e f a forma bilinear simétrica tal que $f(v,v) = q(v)$. Considere também o operador linear T em $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle T(e_i), e_j \rangle = f(e_i, e_j)$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq 3$, sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica e $\langle , \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

a. Encontre base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ com respeito a qual as matrizes $[T]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$ de T e $[f]_{\mathscr{B}}$ de f sejam diagonais.

b. Calcule a assinatura de f.

c. Dê um exemplo de uma base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_{\mathscr{C}}$ é diagonal, mas $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}}$ não é diagonal.

Exercício 15. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v de dimensão finita com $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ e f uma forma bilinear antissimétrica em V. Mostre que f tem posto 2 se, e somente se, existem funcionais lineares linearmente independentes $g, h \in V^*$ tais que $f(v, w) = g(v)h(w) - g(w)h(v)$.

Exercício 16. Seja V um $\mathbb{K}$-e.v. de dimensão finita. Suponha que $f \in \mathscr{L}_2(V; \mathbb{K})$ seja simétrica ou alternada. Denote por $V^\perp = \{v \in V \mid f(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in V\}$ e que U seja um subespaço de V complementar a $V^\perp$, i.e., $V = U \oplus V^\perp$. Mostre que a restrição de f a U é não degenerada.

Exercício 17. Mostre que se n é impar e $A \in M_n(\mathbb{R})$ é antissimétrica então $\det(A) = 0$.

Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é *congruente* a uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ se existe uma matriz invertível P tal que $A = P^T BP$.

Exercício 18. Para cada matriz abaixo encontre uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & -1 & 0 & \\ & & & & & 0_k \end{bmatrix}$$

congruente com ela:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 19. Para cada matriz abaixo encontre uma matriz diagonal da forma

$$\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_m & \\ & & 0_s \end{bmatrix}$$

congruente com ela.

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 10 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercício 20. Considere a função $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q(x, y, z) = 2x^2 + 6xy - 2xz - z^2$.

a. Encontre uma forma bilinear simétrica f tal que $q(v) = f(v, v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

b. Encontre uma base do subespaço $W = \{(0, 0, 1)\}^\perp$. (Aqui a *"ortogonalidade"* é com relação à forma bilinear f: $U^\perp = \{v \in V \mid f(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in U\}$)

c. Seja $\mathscr{B} = \{v_1, v_2\}$ a base encontrada no item anterior e g a restrição de f a $W \times W$. Calcule $[g]_{\mathscr{B}}$.

d. Encontre uma base ortogonal de W com relação a g.

e. Calcule a assinatura e o posto de f.

Ex 1)

Define $\mathcal{B} = \{ \overset{= E_{11}}{E_1}, \overset{= E_{12}}{E_2}, \overset{= E_{13}}{E_3}, \overset{= E_{21}}{E_4}, \overset{= E_{22}}{E_5}, \overset{= E_{23}}{E_6} \}$

Assum $[f]_{\mathcal{B}} = (a_{ij})$; $a_{ij} = f(E_i, E_j)$

Assum

$$a_{11} = f(E_1, E_1) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

$$a_{12} = f(E_1, E_2) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$a_{13} = f(E_1, E_3) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

...

Exc 2)

De fato, sejam $A_1, A_2, B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Então

$$f(\lambda A_1 + A_2, B_1) = n\,tr((\lambda A_1 + A_2)B_1) - tr(\lambda A_1 + A_2)\,tr(B_1)$$

$$= \lambda n\,tr(A_1B_1) + n\,tr(A_2B_1) - (\lambda\,tr(A_1) + tr(A_2))\,tr(B_1)$$

$$= \lambda n\,tr(A_1B_1) - \lambda\,tr(A_1)\,tr(B_1) + n\,tr(A_2B_1) - tr(A_2)\,tr(B_1)$$

$$= \lambda f(A_1, B_1) + f(A_2, B_2)$$

Analogamente, $f(A_1, \lambda B_1 + B_2) = \lambda f(A_1, B_1) + f(A_1, B_2)$

Além disso,

$$f(A,B) = n\,tr(AB) - tr(A)\,tr(B) = n\,tr(BA) - tr(B)\,tr(A) = f(B,A)$$

Logo é simétrica

Finalmente, note que $\forall Y \in M_n(\mathbb{K})$,

$$f(Id, Y) = n\,tr(Id \cdot Y) - tr(Id)\,tr(Y)$$
$$= n\,tr(Y) - n\,tr(Y) = 0$$

Mas $Id \neq 0 \Rightarrow f$ é degenerada.

Ex 13)

a) $f\big(u, f(u,w)v - f(u,v)w\big) =$

$$= f(u,w) \cdot f(u,v) - f(u,v) \cdot f(u,w) = 0$$

Assim

$$f(u,w)\,f(v,u) = f(f(u,w) \cdot v, u)$$

?

$$\therefore f(u,w)\,f(v,u) = f(w,u)\,f(u,v)$$

b) $\Rightarrow f(u,u)\,f(v,u) = f(u,u)\,f(u,v)$

$\Rightarrow f(u,u) \cdot \big(f(v,u) - f(u,v)\big) = 0$

Logo $f(u,v) \neq f(v,u) \Rightarrow f(u,u) = 0$

Ex 4) ($\Longrightarrow$)

Suponha que que $f(v,w) = g(v)h(w)$, para $g, h \in V^*$.

Note que: $L_f : V \longrightarrow V^*$

$v \longmapsto f(v,\cdot) = g(v)\cdot h(\cdot)$

Isto é, $L_f(v)$ coincide com o funcional $g(v)\cdot h$, isto é, $L_f(v)$ é da forma $\lambda \cdot h$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall v \in V \Rightarrow$ posto $(L_f) = 1$

Análogamente, concluímos que posto$(R_f) = 1$

Isto é, posto $(f) =$ posto $(L_f) = 1$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponha que posto $(f) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto $(L_f) =$ posto $(R_f) = 1$

$\Rightarrow \exists\, h, g \in V^*$ tais que

$$L_f(v) = \lambda_v \cdot h \qquad , \quad \lambda_v, \mu_v \in \mathbb{K}$$
$$R_f(v) = \mu_v \cdot g \qquad , \quad \forall v \in V.$$

$h, g \neq 0$

Seja v_1, v_2 tq $h(v_1) \neq 0 \neq g(v_2)$

Então

$$L_f(v)\left(\frac{v_1}{h(v_1)}\right) = \lambda_v\, h\left(\frac{v_1}{h(v_1)}\right) = \lambda_v$$
$$= f\left(v, \frac{v_1}{h(v_1)}\right)$$

Isto é, $\lambda(\cdot) = f\left(\cdot, \frac{v_1}{h(v_1)}\right) \in V^*$

Analogamente,

$$R_f(v)\left(\frac{v_2}{g(v_2)}\right) = \mu_v\, g\left(\frac{v_2}{g(v_2)}\right) = \mu_v$$

$$= f\left(\frac{v_2}{g(v_2)}, v\right)$$

Logo $\mu(\cdot) = f\left(\frac{v_2}{g(v_2)}, \cdot\right) \in V^*$

Assim, pondo $\lambda \doteq g$ e $\mu \doteq h$, segue a igualdade.

Ou ainda: Suponha posto(L_f) = posto$(R_f) = 1$

Então $\exists u_2, \dots, u_n \in V$, $v_2, \dots, v_n \in V$

$$\ker(L_f) = \langle u_2, \dots, u_n \rangle$$
$$\ker(R_f) = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$$

Tome $u_1 \notin \ker(L_f)$ e $v_1 \notin \ker(R_f)$ e $c = f(u_1, v_1)$

Então

$$f(u_1, v_1) = \overbrace{L_f(u_1)}^{\neq 0}(v_1) \neq 0$$

Pois suponha $L_f(u_1)(v_1) = 0$

Então como $L_f(u_1)(v_j) = f(u_1, v_j) = \overbrace{R_f(v_j)}^{=0}(u_1)$

$$\forall j \geq 2$$

Então $L_f \equiv 0$ (pois zera em cada elemento da base) $\Rightarrow \perp$ com posto $L_f = 1$

Defina: $g(u_j) = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$

$$h(v_j) = \begin{cases} c, & j = 1 \\ 0, & j \geq 2 \end{cases}$$

Então, se $i = j = 1$,

$$f(u_1, v_1) = g(u_1) \cdot h(v_1) = c$$

Se $i = 1$, $j \neq 1$, $v_j \in \ker R_f$

$$f(u_1, v_j) = \vec{0} = g(u_1) \cdot h(v_j)$$

Analogamente

$$f(u_j, v_1) = 0$$

e

$$f(u_j, v_j) = 0$$

$\therefore f = g \cdot h$ $\square$

Ex 3)

Suponha $g(T(u), v) = g(u, T(v))$

superior $g(T_1(u), v) = g(u, T_2(v))$

Então

$$[T_1 u]^T [g]_{\mathcal{B}} [v] = [u][g]_{\mathcal{B}} [T_2]_{\mathcal{B}} [v]$$

$$\| $$

$$[u]^T [T_1]^T [g]_{\mathcal{B}} [v]$$

$$\forall u, v \Rightarrow [T_1]_{\mathcal{B}}^T [g]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}} [T_2]$$

$$\Rightarrow [T_2]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}^{-1} [T_1]_{\mathcal{B}}^T [g]_{\mathcal{B}}$$

Ex5) Seja $f \in \mathcal{L}_2(V; \mathbb{K})$

$$f_1(u,v) = \frac{1}{2} f(u,v) + \frac{1}{2} f(v,u)$$

$$f_2(u,v) = \frac{1}{2} f(u,v) - \frac{1}{2} f(v,u)$$

$$\Rightarrow f_1(v,u) = \frac{1}{2} f(v,u) + \frac{1}{2} f(u,v) = \frac{1}{2} f(u,v) + \frac{1}{2} f(v,u) = f_1(u,v)$$

$$\Rightarrow f_2(v,u) = \frac{1}{2} f(v,u) - \frac{1}{2} f(u,v) = -\left(\frac{1}{2} f(u,v) - \frac{1}{2} f(v,u)\right) = -f_2(u,v)$$

Assim $f_1 \in Sym_2(V; \mathbb{K})$, $f_2 \in Asym_2(V; \mathbb{K})$ e

$$f_1(u,v) + f_2(u,v) = \frac{1}{2} f(u,v) + \cancel{\frac{1}{2} f(v,u)} + \frac{1}{2} f(u,v) - \cancel{\frac{1}{2} f(v,u)} = f(u,v)$$

$\forall u, v \in V$

Além disso, $f \in Sym_2(V;\mathbb{K}) \cap ASym_2(V;\mathbb{K})$
$\Rightarrow f(u,v) = -f(u,v) \Rightarrow f(u,v) = 0, \forall u,v$
$\Rightarrow f = 0$

Ex 10)

a) De fato, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
Então, $\forall w \in V$:

$$L_f(\alpha u + v)(w) = f(\alpha u + v, w)$$
$$= \alpha f(u,w) + f(v,w)$$
$$= \alpha L_f(u)(w) + L_f(v)(w)$$
$$= (\alpha L_f(u) + L_f(v))(w)$$

$\Rightarrow L_f(\alpha u + v) = \alpha L_f(u) + L_f(v)$

Logo L_f é linear.
Suponha $L_f(v) = 0 \in V^*$. Então, $\forall w \in V$,
$0 = L_f(v)(w) = f(v,w)$
Como f é não degenerada, isso implica $v = 0$. Logo, $\ker L_f = \{0\}$ e logo L_f é injetiva. Finalmente, como $\dim V < \infty$, temos que $\dim V = n = \dim V^*$, logo L_f injetiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow L_f$ bijetiva $\Rightarrow L_f$ isomorfismo $\square$

b) Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V.
Como L_f é isomorfismo, L_f leva base

em base, logo $\underbrace{\{L_f(v_1), \ldots, L_f(v_n)\}}_{\mathcal{B}^*} \subset V^*$ é base.

Como $\dim V < \infty$, $\exists$ base $\mathcal{B}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ de V tal que $\mathcal{B}^*$ é base dual de $\mathcal{B}'$, isto é,

$$L_f(v_i)(v_j') = \delta_{ij}$$

Mas então

$$f(v_i, v_j') = L_f(v_i, v_j') = \delta_{ij} \quad \square$$

c) Seja $v = \sum_j \alpha_j v_j$. Então

$$f(v, v_j') = f\Big(\sum_i \alpha_i v_i, v_j'\Big) = \sum_i \alpha_i f(v_i, v_j')$$

$$= \alpha_j \Rightarrow v = \sum_j f(v, v_j') v_j$$

Ou, se $v = \sum_j \beta_j v_j'$, então

$$f(v_i, v) = f\Big(v_i, \sum_j \beta_j v_j'\Big)$$

$$= \sum_j \beta_j (v_i, v_j') = \beta_i$$

Logo $v = \sum f(v_j, v) \cdot v_j' \quad \square$

Ex3)

Sejam $\dim V < \infty$ f, g formas bilineares, g ñ-degenerada, então $\exists!\, T_1, T_2 : V \to V$ tal que

$$f(u,v) = g(T_1(u), v) = g(u, T_2(v))$$

Observe que g ñ-degenerada $\Rightarrow L_g : V \to V^*$ é isomorfismo

$R_g : V \to V^*$

$$T_2 = R_g^{-1} \circ R_f$$

$$T_1 = L_g^{-1} \circ L_f$$

Assim

$$\begin{aligned} g(u, T_2(v)) &= g(u, (R_g^{-1} \circ R_f)(v)) \\ &= R_g((R_g^{-1}) \circ R_f)(v))(u) \\ &= R_f(v)(u) = f(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(T_1(u), v) &= g((L_g^{-1} \circ L_f)(u), v) \\ &= L_g((L_g^{-1} \circ L_f)(u), v) \\ &= L_f(u)(v) = f(u,v). \end{aligned}$$

Ex 9)

a) Seja v autovalor de T associado a λ.
Então

$$q(v) = f(v,v) = \langle T(v), v\rangle$$
$$= \lambda \langle v, v\rangle$$

Logo, se $v \in S^1 \Rightarrow q(v) = \lambda$

b)

c) $\langle T(x), x\rangle \geq \langle \lambda x, x\rangle$, $\forall \langle x, x\rangle = 1$

Vejamos que vale $\forall x \in V$

Se $\|x\| = 0$, OK

Se $\|x\| = \alpha \neq 0$, tome $y = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow \langle y, y\rangle = 1$

Assim

$$\langle T(x), x\rangle = \alpha^2 \langle T(y), y\rangle = \alpha^2 \langle \lambda y, y\rangle = \langle \lambda x, x\rangle$$

$$\langle T(x), x\rangle - \langle \lambda x, x\rangle \geq 0$$

$\Rightarrow \langle T(x) - \lambda(x), x\rangle \geq 0 \Rightarrow$ $\boxed{S = T - \lambda Id \text{ é autoadjunta}}$

$\Rightarrow q_1(x) = \langle S(x), x\rangle \geq 0$, $\forall x \in V$

Mas, $q_1(u) = 0 \xRightarrow{(b)} S(u) = 0$

$$\Downarrow$$

$$T(u) = \lambda u$$

Mas $q(u) = \langle T(u), u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda \langle u, u\rangle$
$= \lambda$

$\Rightarrow \lambda = q(u)$ $\square$

b) $q(v) \geq 0 \Rightarrow \langle Tv, v\rangle \geq 0$ + T autoadjunto $\Rightarrow T$ ñ negativo

$q(v) = f(v,v) = \langle T(v), v\rangle = 0$ $\exists \sqrt{T}$

AF: $T(v) = 0$

De fato, primeiro note que T autoadjunta $\Rightarrow \exists T^{1/2}$

Além disso,

$$\|\sqrt{T}x\|^2 = \langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle = \langle \underbrace{\sqrt{T}^*}_{\sqrt{T}}\sqrt{T}x, x\rangle$$

$$= \langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\,\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|^2$$

$\Rightarrow \|\sqrt{T}x\| \leq \sqrt{\|T\|}\,\|x\|$

$\Rightarrow \|\sqrt{T}\| \leq \sqrt{\|T\|}$ (*)

Agora,

$$\|Tx\| = \|\sqrt{T}\sqrt{T}x\| \leq \|\sqrt{T}\|\,\langle \sqrt{T}x, \sqrt{T}x\rangle^{1/2}$$

$$\overset{(*)}{\hookrightarrow} \leq \sqrt{\|T\|}\,\langle \underbrace{\sqrt{T}^*}_{\sqrt{T}}\sqrt{T}x, x\rangle^{1/2}$$

$$= \sqrt{\|T\|}\,\langle Tx, x\rangle^{1/2}$$

Logo $\langle Tx, x\rangle = 0 \Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0$ $\square$

Ex 14) $g((x,y,z)) = f((x,y,z),(x,y,z))$

$$= [x\ y\ z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$2(xy+xz+yz)$
$-(x^2+y^2+z^2)$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x^2 + a_{21}yx + a_{31}xz + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{32}yz + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{33}z^2$$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{22} = -1 \\ a_{33} = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{12} + a_{21} = 2 \\ a_{31} + a_{13} = 2 \\ a_{23} + a_{32} = 2 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{13} = a_{23} = a_{33} = 1$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Suponha que $\langle T(e_i), e_j \rangle = f(e_i, e_j)$
Note que,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \langle Te_1, e_1\rangle & \langle Te_2, e_1\rangle & \langle T \\ \langle Te_1, e_2\rangle & \langle Te_2, e_2\rangle & \vdots \\ \langle Te_1, e_3\rangle & \langle Te_2, e_3\rangle & \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_2,e_1) & f(e_3,e_1) \\ f(e_1,e_2) & f(e_2,e_2) & f(e_3,e_2) \\ f(e_1,e_3) & f(e_2,e_3) & f(e_3,e_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[0,0,1]\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

Note que $f(e_1, e_1) = -1 \neq 0$

Considere $W = \langle e_1 \rangle$

Então $W' = \{v \in V ; f(v_1, v) = 0\}$

Se $v = (x, y, z)$

$$\Rightarrow [-1 \quad 1 \quad 1]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0) \Rightarrow -x + y + z = 0$$

$$\Rightarrow y + z = x$$

$$\Rightarrow W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \ldots$$

Ex 8)

Pelo teorema visto em aula, existe base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que $f \in Sym_2(V; \mathbb{K})$ é diagonal, isto é, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tais que

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Assim, se $v = \sum \alpha_i v_i \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ e logo

$$q(v) = [v]_{\mathcal{B}}^T [f]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = [\alpha_1 \ldots \alpha_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= [\alpha_1 \lambda_1 \ \ \alpha_2 \lambda_2 \ \cdots \ \alpha_n \lambda_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^2$$